คู่มือครูประกอบการสอนฉบับร่าง

การคิดเลขเร็วแบบอินเดีย(เวทคณิต)

ฉบับปรับปรุงเนื้อหาครั้งที่ 2/2561

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

VEDIC MATHS

เวทคณิตออนไลน์

คำนำ

เอกสารคู่มือเวทคณิตฉบับนี้ ทางกลุ่มเฟสบุค เวทคณิตออนไลน์ ได้รับความอนุเคราะห์ ฉบับ ที่ สพฐ. จะจัดทำเป็นหนังสือ ซึ่งเป็นครั้งที่สอง เป็นการปรับปรุง แก้ไข ให้สามารถใช้ได้ กับเด็กทั่วไป และ ยังสามารถใช้ในการแข่งขันได้ เพราะมีเทคนิค ต่างๆในการคิดเลขเร็ว ด้วย ทางผู้เขียนอยาก เผยแพร่ ความรู้ เวทคณิต ที่ถูกต้อง จากฉบับแรกที่เคยออกไปก่อนหน้านี้ มาฉบับนี้เป็นการแก้ไข ข้อผิดพลาดต่างๆในการพิมพ์ครับ เพื่อให้สมาชิกที่อยากเรียนรู้เวทคณิตได้นำไปใช้อย่างเต็มที่ สมความตั้งใจของผู้เขียน ที่ต้องการให้เป็นสมบัติของแผ่นดิน ความรู้ที่มีคุณค่านี้ขอมอบให้สมาชิกทุกท่าน และจะย้อนกลับไปตอบแทนผู้เขียน ที่ท่านไม่ขอเอ่ยนาม ไว้ ณ โอกาส นี้ และหลายคนคงจะทราบกันดีนะครับ

หากมีข้อผิดพลาดประการใด แอดมิน ขอน้อมรับ นำไปปรับแก้ไขให้สมบูรณ์ต่อๆไปครับ

เวทคณิตออนไลน์
4 ตุลาคม 2561

สารบัญ

บทนำ

ท่านศรีภารติ กฤษณะ ติรถะ (Sri Bharati Krsna Tirthaji: พ.ศ. 2427 – 2503) นักวิชาการด้านภาษาสันสกฤต คณิตศาสตร์ ประวัติศาสตร์และปรัชญา ได้ค้นพบเวทคณิตในคัมภีร์อินเดียโบราณ ระหว่างปี พ.ศ. 2454 – 2461 ท่านได้ศึกษาตำราโบราณอินเดียเป็นเวลาหลายปี หลังจากการตรวจสอบอย่างรอบคอบและละเอียดถี่ถ้วน สามารถบูรณาการสร้างชุดของสูตรทางคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่า **เวทคณิต** ได้ทั้งหมด 16 สูตรหลัก คือ

1. Ekadhikina Purvena
   COROLLARY : Anurupyena
   Meaning : By one more than the previous one
2. Nikhilam Navatashcaramam Dashatah
   COROLLARY : Sisyate Sesasamjnah
   Meaning : All from 9 and the last from 10
3. Urdhva-Tiryagbyham
   COROLLARY : Adyamadyenantyamantyena
   Meaning : Vertically and crosswise
4. Paraavartya Yojayet
   COROLLARY : Kevalaih Saptakam Gunyat
   Meaning : Transpose and adjust
5. Shunyam Saamyasamuccaye
   COROLLARY : Vestanam
   Meaning : When the sum is the same that sum is zero.
6. (Anurupye) Shunyamanyat
   COROLLARY : Vestanam
   Meaning : If one is in ratio, the other is zero
7. Sankalana-vyavakalanabhyam
   COROLLARY : Yavadunam Tavadunikritya Vargancha Yojayet
   Meaning : By addition and by subtraction
8. Puranapuranabyham
   COROLLARY : Antyayordashake'pi
   Meaning : By the completion or non-completion
9. Chalana - Kalanabyham
   COROLLARY : Antyayoreva
   Meaning : Differences and Similarities
10. Yaavadunam
    COROLLARY : Samuccayagunitah

Meaning : Whatever the extent of its deficiency

11. Vyashtisamanstih

    COROLLARY : Lopanasthapanabhyam

    Meaning : Part and Whole

12. Shesanyankena Charamena

    COROLLARY : Vilokanam

    Meaning : The remainders by the last digit

13. Sopaantyadvayamantyam

    COROLLARY : Gunitasamuccayah Samuccayagunitah

    Meaning : The ultimate and twice the penultimate

14. Ekanyunena Purvena

    COROLLARY : Dhvajanka

    Meaning : By one less than the previous one

15. Gunitasamuchyah

    COROLLARY : Dwandwa Yoga

    Meaning : The product of the sum is equal to the sum of the product

16. Gunakasamuchyah

    COROLLARY : Adyam Antyam Madhyam

    Meaning : The factors of the sum is equal to the sum of the factors

1. การดำเนินการบวก

ในบทนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการบวกแบบเวทคณิตมี 2 เรื่อง คือ การดำเนินการบวก และการหาผลบวกเลขโดดของจำนวนเต็ม ซึ่งแต่ละเรื่องมีรายละเอียด ดังนี้

1. เกริ่นนำ
2. การดำเนินการบวก
    2.1 การดำเนินการบวกจากทางซ้ายไปทางขวา
    2.2 การดำเนินการบวกเลขโดยใช้จุด **(•)** แทนการเท่ากับสิบ
3. การหาผลบวก**เลขโดดของจำนวนเต็ม**
    3.1 วงกลมเก้าจุด (The nine – point circle)
    3.2 เทคนิคการหาผลบวกเลขโดดของจำนวนนับด้วยการตัดเลข 9 ออก
    3.3 การนำผลบวกเลขโดดของจำนวนเต็มไปใช้ตรวจผลเฉลยของการดำเนินการบวก

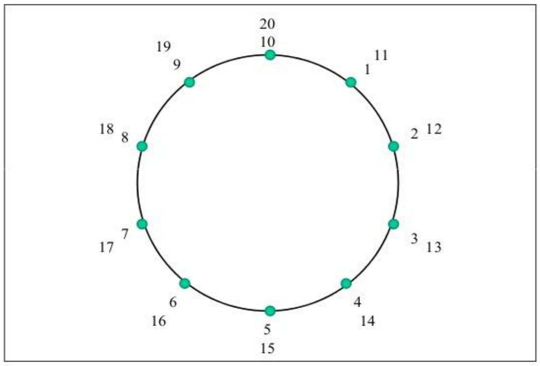
1. เกริ่นนำ

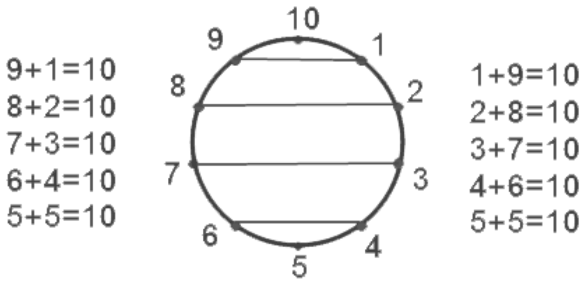
สูตรแรกที่จะได้เรียนรู้ คือ จำนวนที่มากกว่าอยู่หนึ่งของตัวที่มาก่อน หรือ จำนวนที่มากกว่าอยู่หนึ่งของตัวที่อยู่ถัดไป (By One more than the One Before (Ekadhikina Purvena)) คือ จำนวนนับ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,...

3 มากกว่า 2 อยู่ 1 เมื่อ 2 มาก่อน 3
4 มากกว่า 3 อยู่ 1 เมื่อ 3 มาก่อน 4 เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

เนื่องจากการนับเลขของเราใช้ระบบฐานสิบ คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,... ดังนั้น เมื่อพิจารณาการนับไปเรื่อยๆ จะพบว่าเกิดระบบการครบรอบของสิบคือ 10, 20, 30, 40 เป็นต้น สามารถนำไปสร้างบนวงกลมได้เป็น 10 จุด และจะพบสมบัตินำไปใช้ในการบวกเลขได้ ซึ่งวงกลม 10 จุด เป็นการแสดงคู่ของเลขที่บวกกันได้ 10

The Ten Point Circle





บทนิยาม ทบสิบ คือ การบวกจำนวนเต็มบวกสองจำนวนให้เท่ากับ 10

ถ้าให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้ว a + b = b + a = 10 เรียก a และ b เป็นจำนวนทบสิบ ซึ่งกันและกัน ซึ่งผลบวกคู่จำนวนทบสิบของจำนวนเต็ม 1 ถึง 9 มีดังนี้

1 และ 9 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกัน เพราะ $1 + 9 = 9 + 1 = 10$
2 และ 8 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกัน เพราะ $2 + 8 = 8 + 2 = 10$
3 และ 7 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกัน เพราะ $3 + 7 = 7 + 3 = 10$
4 และ 6 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกัน เพราะ $4 + 6 = 6 + 4 = 10$
5 และ 5 เป็นจำนวนทบสิบซึ่งกันและกัน เพราะ $5 + 5 = 10$

ปัญหาชวนคิด

จงหาผลบวกของจำนวนต่อไปนี้

1. $6 + 4$
2. $16 + 4$
3. $5 + 25$
4. $13 + 7$
5. $22 + 8$
6. $38 + 2$
7. $54 + 6$
8. $74 + 6$
9. $61 + 9$
10. $85 + 5$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก $47 + 37$
โดยใช้วิธีการทบ

$$\begin{aligned} 47 + 37 &= 47 + 3 + 34 \\ &= (47 + 3) + 30 + 4 \\ &= 50 + 30 + 4 \\ &= 84 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวก $29 + 7 + 1 + 5$
โดยใช้วิธีการทบ

$$\begin{aligned} 29 + 7 + 1 + 5 &= (29 + 1) + 7 + 5 \\ &= (29 + 1) + 7 + (3 + 2) \\ &= (29 + 1) + (7 + 3) + 2 \\ &= 30 + 10 + 2 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 จงหาผลบวกของจำนวนต่อไปนี้โดยใช้วิธีการทบสิบ

1) $55 + 28$
2) $47 + 25$
3) $29 + 26$
4) $16 + 3 + 6 + 7$
5) $8 + 51 + 12 + 3$
6) $37 + 7 + 21 + 13$
7) $13 + 16 + 17 + 24$
8) $33 + 25 + 22 + 15$

2. การดำเนินการบวก

2.1 การดำเนินการบวกจากทางซ้ายไปทางขวาพื้นฐานการคิดเลขแบบเวทคณิต

ความสามารถในการคิดเลขนั้นเราจะต้องมีการทำเครื่องหมายสำหรับตัวเลขหรือจำนวน ที่ง่าย ชัดเจน สะดวกในการจดจำและเพื่อให้การคิดเลขในใจได้ โดยเฉพาะเรื่องการทดเลข นั่นคือ การทำเครื่องหมายที่**ตัวทดหรือเลขทด** (carry figures) จากการดำเนินการ บวก ลบ คูณ หาร และยิ่งไปกว่านี้ ถ้าใช้การคิดเลขจากทางซ้ายไปทางขวาจะทำให้การคิดเลขมีประสิทธิภาพและสามารถคิดเลขในใจได้ง่ายและรวดเร็ว เพราะการคิดเลขจากทางซ้ายไปทางขวาเป็นการหาส่วนแรกไปหาส่วนท้ายของคำตอบ ซึ่งเป็นขั้นตอนที่หนึ่งไปขั้นตอนที่สองและขั้นตอนอื่นๆ ไปเรื่อยๆ จนได้คำตอบสมบูรณ์ นี่คือเทคนิคของการคิดเลขแบบเวทคณิตที่ได้เปรียบในการคิดเลขเร็วและถูกต้องแม่นยำ ซึ่งเราสามารถพัฒนาความคิดนี้ได้

การคิดเลขจากทางซ้ายไปทางขวา (CALCULATION FROM LEFT TO RIGHT)

การคิดเลขแบบเวทคณิตมีความจำเป็นที่จะต้องปรับเปลี่ยนยุทธวิธีของการคิด โดยการคิดเลขจากทางซ้ายไปทางขวา ซึ่งเป็นการได้เปรียบในการคิดเลขเร็วและสามารถคิดเลขในใจได้ นี่คืองานที่เราจะต้องทำและหาวิธีทำให้เกิดความเป็นธรรมชาติของการคิดเลขแบบเวทคณิต ซึ่งจะศึกษาและอธิบายรายละเอียด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของ 76 + 88

วิธีทำ

$$\begin{array}{rrrl} & 7 & 6 & \\ & 8 & 8 & + \\ \cline{2-3} 1 & & & \\ & 5 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow$$

ขั้นที่ 1 หาผลบวกตัวเลขทางซ้าย คือ หลักสิบ 7 + 8 = 15
แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นคำตอบตัวแรกของการบวกหลักสิบ (ตัวทด)
ลงในหลักร้อย และเขียน 5 เป็นตัวห้อยลงในหลักสิบ

$$\begin{array}{rrrl} & 7 & 6 & \\ & 8 & 8 & + \\ \cline{2-3} 1 & 1 & 4 & \\ & 5 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow$$

ขั้นที่ 2 หาผลบวกตัวเลขหลักถัดไปทางขวา คือ หลักหน่วย
6 + 8 = 14 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อย
ของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 4 ลงในหลักหน่วย

$$\begin{array}{rrrl} & 7 & 6 & \\ & 8 & 8 & + \\ \cline{2-3} 1 & 1 & 4 & \\ & 5 & & \\ \hline 1 & 6 & 4 & \\ \hline\hline \end{array} \Rightarrow$$

ขั้นที่ 3 หาผลบวกจากซ้ายไปขวาได้ 164

ดังนั้น 76 + 88 = 164

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของ 596 + 738

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 9 & 6 & \\ & 7 & 3 & 8 & + \\ \cline{2-4} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1 หาผลบวกตัวเลขทางซ้าย คือ หลักร้อย 5 + 7 = 12 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นคำตอบตัวแรกของการบวกหลักร้อย (ตัวทด) ลงในหลักพัน และเขียน 2 เป็นตัวห้อยลงในหลักร้อย

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 9 & 6 & \\ & 7 & 3 & 8 & + \\ \cline{2-4} 1 & 1 & & & \\ & 2 & 2 & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2 หาผลบวกตัวเลขหลักถัดไปทางขวา คือ หลักสิบ 9 + 3 = 12 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อยของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 2 เป็นตัวห้อยลงในหลักสิบ

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 9 & 6 & \\ & 7 & 3 & 8 & + \\ \cline{2-4} 1 & 1 & 1 & 4 & \\ & 2 & 2 & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3 หาผลบวกตัวเลขหลักถัดไปทางขวา คือ หลักหน่วย 6 + 8 = 14 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อยของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 4 ลงในหลักหน่วย

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 9 & 6 & \\ & 7 & 3 & 8 & + \\ \cline{2-4} 1 & 1 & 1 & 4 & \\ & 2 & 2 & & \\ \hline 1 & 3 & 3 & 4 & \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4 หาผลบวกจากซ้ายไปขวาได้ 1334

ดังนั้น $596+738=1334$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของ 5678 + 2468

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ & 2 & 4 & 6 & 8 & + \\ \cline{2-5} 0 & & & & & \\ & 7 & & & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1 หาผลบวกตัวเลขทางซ้าย คือ หลักพัน 5 + 2 = 07 (ถ้าผลบวกไม่เกิน 9 เขียน 0 ไว้หน้าเลขโดด) แล้วเขียน 0 ซึ่งเป็นคำตอบตัวแรกของการบวกหลักพันลงในหลักหมื่น และเขียน 7 เป็นตัวห้อยลงในหลักพัน

$$\begin{array}{cccccl} & 5 & 6 & 7 & 8 & + \\ & 2 & 4 & 6 & 8 & \\ \cline{2-5} 0 & 1 & & & & \\ & 7 & 0 & & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2 หาผลบวกตัวเลขหลักถัดไปทางขวา คือ หลักร้อย
6 + 4 = 10 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อย
ของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 0 เป็นตัวห้อยลงในหลักร้อย

$$\begin{array}{cccccl} & 5 & 6 & 7 & 8 & + \\ & 2 & 4 & 6 & 8 & \\ \cline{2-5} 0 & 1 & 1 & & & \\ & 7 & 0 & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3 หาผลบวกตัวเลขหลักถัดไปทางขวา คือ หลักสิบ
7 + 6 = 13 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อย
ของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 3 เป็นตัวห้อยลงในหลักสิบ

$$\begin{array}{cccccl} & 5 & 6 & 7 & 8 & + \\ & 2 & 4 & 6 & 8 & \\ \cline{2-5} 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & \\ & 7 & 0 & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4 หาผลบวกตัวเลขหลักถัดไปทางขวา คือ หลักหน่วย
8 + 8 = 16 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อย
ของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 6 ลงในหลักหน่วย

$$\begin{array}{cccccl} & 5 & 6 & 7 & 8 & + \\ & 2 & 4 & 6 & 8 & \\ \cline{2-5} 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & \\ & 7 & 0 & 3 & & \\ \hline & 8 & 1 & 4 & 6 & \\ \cline{2-5} \cline{2-5} \end{array}$$

ขั้นที่ 5 หาผลบวกจากซ้ายไปขวาได้ 8146

ดังนั้น 5678 + 2468 = 8146

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลบวก 3729 + 853

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccl} & 3 & 7 & 2 & 9 & + \\ & & 8 & 5 & 3 & \\ \cline{2-5} 0 & & & & & \\ & 3 & & & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1 หาผลบวกตัวเลขทางซ้าย คือ หลักพัน 3 + 0 = 03
แล้วเขียน 0 ซึ่งเป็นคำตอบตัวแรกของการบวกหลักพันลงในหลักหมื่น
และเขียน 3 เป็นตัวห้อยลงในหลักพัน

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & 7 & 2 & 9 & + \\ & & 8 & 5 & 3 & \\ \hline 0 & 1 & & & & \\ & 3 & 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2 หาผลบวกตัวเลขหลักถัดไปทางขวา คือ หลักร้อย 7 + 8 = 15 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อยของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 5 เป็นตัวห้อยลงในหลักร้อย

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & 7 & 2 & 9 & + \\ & & 8 & 5 & 3 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & & & \\ & 3 & 5 & 7 & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3 หาผลบวกตัวเลขหลักถัดไปทางขวา คือ หลักสิบ 2 + 5 = 07 แล้วเขียน 0 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรกไว้บนตัวห้อยของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 7 เป็นตัวห้อยลงในหลักสิบ

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & 7 & 2 & 9 & + \\ & & 8 & 5 & 3 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \\ & 3 & 5 & 7 & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4 หาผลบวกตัวเลขหลักถัดไปทางขวา คือ หลักหน่วย 9 + 3 = 12 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อยของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 2 ลงในหลักหน่วย

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & 7 & 2 & 9 & + \\ & & 8 & 5 & 3 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \\ & 3 & 5 & 7 & & \\ \hline & 4 & 5 & 8 & 2 & \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 5 หาผลบวกจากซ้ายไปขวาได้ 4582

ดังนั้น 3729 + 853 = 4582

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลบวกของ 989 + 73878

วิธีทำ

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 9 & 8 & 9 & + \\ & 7 & 3 & 8 & 7 & 8 & \\ \hline 0 & & & & & & \\ & 7 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1 หาผลบวกตัวเลขทางซ้าย คือ หลักหมื่น 0 + 7 = 07 แล้วเขียน 0 ซึ่งเป็นคำตอบของการบวกหลักหมื่นลงในหลักแสน และให้เขียน 7 เป็นตัวห้อยลงในหลักหมื่น

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 9 & 8 & 9 & + \\ & 7 & 3 & 8 & 7 & 8 & \\ \hline 0 & 0 & & & & & \\ & 7 & 3 & & & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2 หาผลบวกของหลักถัดไปทางขวา คือ หลักพัน 0 + 3 = 03 แล้วเขียน 0 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรกไว้บนตัวห้อยของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 3 เป็นตัวห้อยลงในหลักพัน

$$\begin{array}{cccccc@{\,}l} & & & 9 & 8 & 9 & \\ & 7 & 3 & 8 & 7 & 8 & + \\ \hline 0 & 0 & 1 & & & & \\ & 7 & 3 & 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3 หาผลบวกของหลักถัดไปทางขวา คือ หลักร้อย 9 + 8 = 17 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อยของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 7 เป็นตัวห้อยลงในหลักร้อย

$$\begin{array}{cccccc@{\,}l} & & & 9 & 8 & 9 & \\ & 7 & 3 & 8 & 7 & 8 & + \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ & 7 & 3 & 7 & 5 & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4 หาผลบวกของหลักถัดไปทางขวา คือ หลักสิบ 8 + 7 = 15 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อยของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 5 เป็นตัวห้อยลงในหลักสิบ

$$\begin{array}{cccccc@{\,}l} & & & 9 & 8 & 9 & \\ & 7 & 3 & 8 & 7 & 8 & + \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 & \\ & 7 & 3 & 7 & 5 & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 5 หาผลบวกของหลักถัดไปทางขวา คือ หลักหน่วย 9 + 8 = 17 แล้วเขียน 1 ซึ่งเป็นผลบวกตัวแรก (ตัวทด) ไว้บนตัวห้อยของหลักก่อนหน้าที่อยู่ติดกัน และเขียน 7 ลงในหลักหน่วย

$$\begin{array}{cccccc@{\,}l} & & & 9 & 8 & 9 & \\ & 7 & 3 & 8 & 7 & 8 & + \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 & \\ & 7 & 3 & 7 & 5 & & \\ \hline & 7 & 4 & 8 & 6 & 7 & \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 6 หาผลบวกจากซ้ายไปขวาได้ 74867

ดังนั้น 989 + 73878 = 74867

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 จงหาผลบวกของจำนวนต่อไปนี้

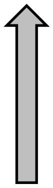
1) 27 + 52	2) 61 + 58	3) 48 + 77
4) 657 + 156	5) 438 + 956	6) 218 + 743
7) 6578 + 1562	8) 4599 + 7422	9) 3926 + 9485
10) 45 88 + 24	11) 445 787 + 459	12) 97669 69788 + 99260

2.2 การบวกเลขโดยใช้จุด (•) แทนการเท่ากับสิบ

วิธีการบวกในเวทคณิตได้ทำให้การบวกนั้นง่ายขึ้น เนื่องจากตัวเลขแต่ละหลักที่นำมาบวกกันเป็นตัวเลขที่น้อยกว่า 10 สูตรที่พัฒนาขึ้นใช้เรียกว่า สูตรสุทธะ (Sutra Shudha) เมื่อผลบวกมากกว่า 9 โดยที่การบวกเลขโดด (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 และ 0) สองจำนวนเมื่อได้ผลลัพธ์มากกว่า 9

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก 379 + 854 + 767 + 426

วิธีทำ



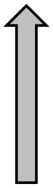
$$\begin{array}{rl} 3\;7\;\dot{9} & \\ 8\;5\;4 & \\ 7\;6\;\dot{7} & + \\ \underline{4\;2\;6} & \\ \underline{\underline{\;\;6}} & \end{array}$$

ขั้นที่ 1 การดำเนินการบวกกระทำแบบปกติแต่ละหลักจาก หลักหน่วย → หลักสิบ → หลักร้อย → ... จากข้างล่างขึ้นข้างบน

(a) 6 + 7 = 13 ซึ่งมากกว่า 9 ดังนั้น กล่าว “สุทธะ” (Shudha) แล้วใส่จุด บน 7 ($\dot{7}$) จุด หมายถึง ทิ้งทด 1 ของหลักสิบไว้ ส่วน 3 ของหลักหน่วยก็ดำเนินการบวกกับตัวเลขของหลักหน่วยข้างบนต่อไป

(b) 3 + 4 = 7 ซึ่งไม่เกิน 9 ไม่เกิดกระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran) คือ ไม่ต้องกล่าว “สุทธะ” และไม่ใส่จุด ยังคงหาผลบวกกับตัวเลขถัดไปข้างบน ซึ่งก็คือ 7 + 9 = 16 เรากล่าว “สุทธะ” และใส่จุดบน 9 ($\dot{9}$) ส่วน 6 ใส่เป็นคำตอบที่หลักหน่วย

(c) การดำเนินการบวกยังคงดำเนินต่อไปจากข้างล่างขึ้นข้างบนในหลักถัดไป



$$\begin{array}{rl} 3\;\dot{7}\;\dot{9} & \\ 8\;5\;4 & + \\ 7\;6\;7 & \\ \underline{4\;2\;6} & \\ \underline{\underline{\;2\;6}} & \end{array}$$

ขั้นที่ 2 ก่อนที่จะเลื่อนไปดำเนินการบวกหลักที่ 2 หรือหลักสิบ ยังคงมีจุดอยู่ที่หลักหน่วย 2 จุด ถูกนับเป็นสอง

(a) 2 จากสองจุดในหลักหน่วยต้องนำไปบวกกับตัวเลขล่างสุดของหลักสิบ 2 + 2 = 4 ผลลัพธ์นำไปบวกตัวเลขถัดขึ้นไป คือ 4 + 6 = 10 ดังนั้นกล่าว “สุทธะ” แล้วใส่จุดบนเลข 6 ($\dot{6}$) ทิ้งทด 1 เป็นตัวทดสำหรับหลักร้อย

(b) 0 + 5 = 5 แล้วนำ 5 มาบวกกับ 7 เท่ากับ 12 กล่าว “สุทธะ” และใส่จุดบนเลข 7 ($\dot{7}$) ส่วน 2 ใส่เป็นคำตอบที่หลักสิบ

(c) การดำเนินการบวกยังคงดำเนินต่อไปจากข้างล่างขึ้นข้างบนในหลักถัดไป

⇧

$$\begin{array}{r}
3\ \dot{7}\ \dot{9} \\
\dot{8}\ 5\ 4 \\
\dot{7}\ \dot{6}\ \dot{7} \\
\underline{4\ 2\ 4} \\
\underline{\underline{2\ 4\ 2\ 6}}
\end{array} +$$

ขั้นที่ 3 ก่อนที่จะเลื่อนไปดำเนินการบวกหลักที่ 3 หรือหลักร้อย ยังคงมีจุดอยู่ที่หลักสิบ 2 จุด ถูกนับเป็นสอง

(a) 2 จากสองจุดต้องนำไปบวกกับตัวเลขล่างสุดของหลักร้อย 2 + 4 = 6 ผลลัพธ์นำไปบวกตัวเลขถัดขึ้นไป คือ 6 + 7 = 13 ผลบวกเกิน 9 ดังนั้น กล่าว “สุทธะ” และใส่จุดบน 7 ($\dot{7}$) ทิ้งทด 1 เป็นจุด แล้วนำ 3 ไปบวกตัวเลขหลักเดียวกันถัดขึ้นไป

(b) 3 + 8 = 11 ผลบวกเกินสิบ กล่าว “สุทธะ” และใส่จุดบน 8 ($\dot{8}$) ทิ้งทด 1 เป็นจุด แล้วนำ 1 ไปบวกตัวเลขหลักเดียวกันถัดขึ้นไปได้ 1 + 3 = 4

(c) นับจำนวนจุดของหลักร้อยทั้งหมดจะได้เป็นตัวทดของหลักถัดไป คือ หลักพัน แทนด้วย 2

ดังนั้น 379 + 854 + 767 + 426 = 2,426

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวก 78924 + 27272 + 99999 + 72672

วิธีทำ

⇩

$$\begin{array}{r}
7\ \dot{8}\ \dot{9}\ 2\ 4 \\
\dot{2}\ 7\ 2\ \dot{7}\ 2 \\
\dot{9}\ \dot{9}\ \dot{9}\ 9\ \dot{9} \\
\underline{7\ 2\ 6\ \dot{7}\ 2} \\
\underline{\underline{2\ 7\ 8\ 8\ 6\ 7}}
\end{array} +$$

ขั้นที่ 1 การดำเนินการบวกจากข้างบนลงข้างล่างสามารถดำเนินการได้เช่นกัน

ขั้นที่ 2 4 + 2 = 6, 6 + 9 = 15 (สุทธะ), 5 + 2 = 7 ใส่ 7 เป็นคำตอบที่หลักหน่วย

ขั้นที่ 3 นับจุดจากหลักหน่วยได้ 1 จุด 1 + 2 = 3, 3 + 7 = 10 (สุทธะ), 0 + 9 = 9, 9 + 7 = 16 (สุทธะ) ใส่ 6 เป็นคำตอบที่หลักสิบ

ขั้นที่ 4 นับจุดจากหลักสิบได้ 2 จุด 2 + 9 = 11 (สุทธะ), 1 + 2 = 3, 3 + 9 = 12 (สุทธะ), 2 + 6 = 8 ใส่ 8 เป็นคำตอบที่หลักร้อย

ขั้นที่ 5 นับจุดจากหลักร้อยได้ 2 จุด 2 + 8 = 10 (สุทธะ), 0 + 7 = 7, 7 + 9 = 16 (สุทธะ), 6 + 2 = 8 ใส่ 8 เป็นคำตอบที่หลักพัน

ขั้นที่ 6 นับจุดจากหลักพันได้ 2 จุด 2 + 7 = 9, 9 + 2 = 11 (สุทธะ), 1 + 9 = 10 (สุทธะ), 0 + 7 = 7 ใส่ 7 เป็นคำตอบที่หลักหมื่น

ขั้นที่ 7 นับจำนวนจุดของหลักหมื่นทั้งหมดจะได้เป็นตัวทดของหลักถัดไป คือ หลักแสน แทนด้วย 2

ดังนั้น 78924 + 27272 + 99999 + 72672 = 278867

แบบฝึกหัดชุดที่ 3

การหาผลบวกโดยใช้จุด (•) แทนการเท่ากับสิบจงหาผลบวกของจำนวนต่อไปนี้

1) $\begin{array}{r} 3\dot{7} \\ 23\,+ \\ \hline 60 \\ \hline\hline \end{array}$	2) $\begin{array}{r} 65 \\ \dot{5}\dot{9}\,+ \\ \hline 124 \\ \hline\hline \end{array}$	3) $\begin{array}{r} 48 \\ 99\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$
4) $\begin{array}{r} 657 \\ 156\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	5) $\begin{array}{r} 438 \\ 956\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	6) $\begin{array}{r} 218 \\ 743\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$
7) $\begin{array}{r} 6578 \\ 1562\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	8) $\begin{array}{r} 4599 \\ 7422\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	9) $\begin{array}{r} 3926 \\ 9485\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$
10) $\begin{array}{r} 65781 \\ 75639\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	11) $\begin{array}{r} 84559 \\ 98462\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	12) $\begin{array}{r} 99260 \\ 94859\,+ \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

13) 45787 88787 24567 + 85908 75639	14) 44559 25787 84559 + 65781 98462	15) 97669 69788 99260 + 45893 94859
16) 65781 99798 + 25787 75639	17) 84559 65781 + 84559 98462	18) 99260 75777 + 45899 94859
19) 45787 777 69788 8787 + 75777 768 75639	20) 44559 69788 59768 25787 + 84559 65781 98462	21) 97669 84559 4870 9088 + 88787 64559 859

22)

$$\begin{array}{rl} 45787 & \\ 75777 & \\ 59768 & \\ 25787 & + \\ 88787 & \\ 97669 & \\ 75639 & \\ \hline & \\ \hline\hline \end{array}$$

23)

$$\begin{array}{rl} 44559 & \\ 69788 & \\ 69788 & \\ 88787 & + \\ 25787 & \\ 65781 & \\ 98462 & \\ \hline & \\ \hline\hline \end{array}$$

24)

$$\begin{array}{rl} 97669 & \\ 84559 & \\ 97669 & \\ 88888 & + \\ 69788 & \\ 45787 & \\ 94859 & \\ \hline & \\ \hline\hline \end{array}$$

25)

$$\begin{array}{rl} 457879 & \\ 757775 & \\ 69788 & + \\ 787 & \\ 756399 & \\ \hline & \\ \hline\hline \end{array}$$

26)

$$\begin{array}{rl} 5597 & \\ 697885 & \\ 97687 & + \\ 257875 & \\ 98462 & \\ \hline & \\ \hline\hline \end{array}$$

27)

$$\begin{array}{rl} 9769979 & \\ 845595 & \\ 84870679 & + \\ 69788690 & \\ 5494859 & \\ \hline & \\ \hline\hline \end{array}$$

3. การหาผลบวกเลขโดดของจำนวนเต็ม

เลขโดด คือ ตัวเลขแต่ละตัวในจำนวน ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 และ 0 นั่นคือ ตัวเลขตัวเดียว และจำนวน 10, 11, 12, 13, ... , 99 เป็นจำนวนที่มีเลขโดด 2 ตัว เป็นต้น

สูตรที่ 15 ของเวทคณิตกล่าวไว้ว่า "ผลลัพธ์ของการกระทำบวกเท่ากับการกระทำบวกของผลลัพธ์ (The product of the sum is equal to the sum of the product) '' กล่าวคือจำนวนเต็มบวกทุก ๆ จำนวนไม่ว่าจะมีกี่หลักก็ตามสามารถลดรูปโดยการบวกตัวเลขโดด (digit sum) ซ้ำ ๆ เป็นตัวเลขตัวเพียงเดียวได้ เช่น 43 มีผลบวกเลขโดดคือ 7 เมื่อ $4+3=7$ เช่นเดียวกัน $47,4+7=11$ แล้วหาผลบวกต่อ $11,1+1=2$ ดังนั้นผลบวกเลขโดดของ 47 คือ 2 หรือ $867,8+6+7=21$ แล้วหาผลบวกต่อ $21,2+1=3$ เป็นต้น

บทนิยาม ผลบวกเลขโดด (digit sum) ของจำนวนใดๆ คือ การนำตัวเลขโดดในจำนวนนั้นๆ มาบวกกัน

เช่น
- ผลบวกเลขโดดของ 17 คือ 8 เพราะว่า 1 + 7 = 8
- ผลบวกเลขโดดของ 123 คือ 6 เพราะว่า 1 + 2 + 3 = 6
- สำหรับ ผลบวกเลขโดดของ 19 เราหาได้จาก 1 + 9 = 10 และเมื่อ 10 เป็นจำนวนที่มีตัวเลขโดด 2 ตัว หาผลบวกเลขโดดของ 10 อีกครั้ง 1 + 0 = 1 ดังนั้นผลบวกเลขโดดของ 19 เขียนแทนด้วย
  19 → 1 + 9 = 10 → 1 + 0 = 1
- ผลบวกของเลขโดด 39 จะได้ 3 + 9 = 12 → 1 + 2 = 3

สมบัติของผลบวกเลขโดด

ผลบวกเลขโดดของจำนวนใด ๆ สามารถลดรูปเป็นตัวเลขตัวเดียวได้เสมอ โดยที่บวกตัวเลขทุกตัว และถ้าเราได้จำนวนที่มีตัวเลขโดด 2 ตัว ก็ให้หาผลบวกเลขโดดอีกครั้ง

3.1 วงกลมเก้าจุด (The nine-point Circle)

จำนวนที่มากกว่าอยู่หนึ่งของตัวที่มาก่อน หรือ จำนวนที่มากกว่าอยู่หนึ่งของตัวที่อยู่ถัดไป (By One more than the One Before (*Ekadhikina Purvena*)) ก็คือจำนวนนับ เริ่มต้นที่ 1 และเพิ่มขึ้น ทีละ 1 ไปเรื่อยๆ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, … ดังนั้น เมื่อพิจารณาการนับไปเรื่อยๆ ถ้าพิจารณาจะพบว่าเกิดระบบการครบรอบของสิบ คือ 10, 20, 30, 40 เป็นต้น เราสามารถนำไปสร้างบนวงกลมได้เป็น 9 จุด แต่ถ้าเรานำผลบวกเลขโดดของจำนวนนับที่เรียงอันดับกันอยู่ ก็จะพบสมบัติดังนี้

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, …

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, …

จากสมบัติข้างต้นนี้นำไปสร้างวงกลมเก้าจุด โดยใช้ผลบวกเลขโดดของจำนวนนับที่เรียงอันดับกันได้ ดังนี้

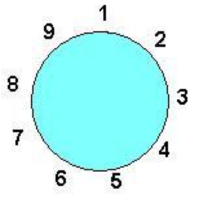


Figure 1.a

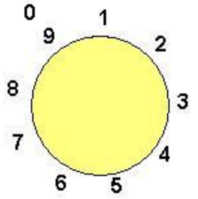


Figure 1.b

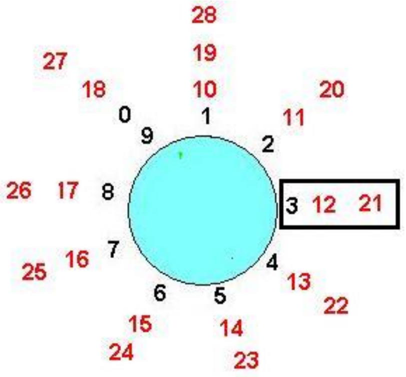


Figure 2

ได้เก้าจุดเมือใส่จำนวนนับทีต่อเนืองลงไป จะสังเกตพบว่าแต่ละแขนงมีผลบวกเลขโดดเท่าๆ กัน เช่น

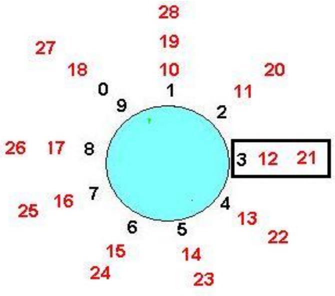


Figure 2

แขนงผลบวกเลขโดดเท่ากับ 3 ได้แก่ 3, 12, 21 เป็นต้น

แขนงผลบวกเลขโดดเท่ากับ 1 ได้แก่ 1, 10, 19, 28 เป็นต้น

จะเห็นว่าแขนงนี้พบสมบัติ เช่น

ผลบวกเลขโดดของ 1 เท่ากับผลบวกเลขโดดของ 10 คือ 1 + 0 = 1

เท่ากับผลบวกเลขโดดของ 19 คือ 1 + 9 = 10 → 1 + 0 =1

เท่ากับผลบวกเลขโดดของ 28 คือ 2 + 8 = 1 + (1 + 8) → 1 + 9 = 1

แสดงว่าถ้านำเลขโดด 9 ไปบวกกับเลขโดดใดๆ ไม่มีผลกับผลบวกเลขโดดของจำนวนนั้นๆ ดังนั้นในการหาผลบวกเลขโดดของจำนวนใดๆ มีเทคนิคในการตัดเลขโดด 9 ออก หรือผลบวกเลขโดดสองจำนวนเท่ากับ 9 เช่น 4, 40, 49, 94, 949 ทุกจำนวนมีผลบวกเลขโดดเท่ากับ 4

ข้อสังเกต

พิจารณาเลข 0 บนวงกลมเก้าจุด ควรจะอยู่บนตำแหน่งใดบนวงกลมเก้าจุด ถ้าเราจะต้องนับทวนเข็มนาฬิกาถอยหลังจากเลข 1 ก็จะได้ เลข 0 ควรอยู่ตรงตำแหน่งเดียวกับเลข 9 ดังรูปข้างบน ซึ่งเราจะได้ศึกษาต่อในเรื่องวินคิวลัม

ตัวอย่าง จงหาผลบวกเลขโดดของ 3949

วิธีทำ โดยวิธีปกติ ผลบวกเลขโดด คือ 3 + 9 + 4 + 9 = 25 → 2 + 5 = 7

โดยวิธีตัด 9 ออก เหลือ 3 กับ 4 ดังนั้น 3 + 4 = 7

แบบฝึกหัดชุดที่ 4 จงหาผลบวกเลขโดดของจำนวนต่อไปนี้

จำนวนเต็ม	ผลบวกของเลขโดด	จำนวนเต็ม	ผลบวกของเลขโดด
465		2346	
274		16271	
3335		9653	
6139		36247	
2561		215841	
891	9 หรือ 0	7125	
723		9821736	

3.2 การนำผลบวกเลขโดดของจำนวนเต็มไปใช้ตรวจผลเฉลยของการดำเนินการบวก

ตัวอย่าง จงหาผลบวกของ 32 + 12 และตรวจผลเฉลยด้วยผลบวกเลขโดด

วิธีทำ

$$\begin{array}{lcl} 3\;2 & \longrightarrow & 5 \\ \quad + & & \downarrow + \\ \underline{1\;2} & \longrightarrow & \underline{3} \\ & & \downarrow \\ \underline{\underline{4\;4}} & \longrightarrow & \underline{\underline{8}} \end{array}$$

วิธีการตรวจผลเฉลยว่าถูกต้องหรือไม่

หาผลบวกเลขโดดของสองจำนวนที่นำมาบวกกัน คือ

32 ผลบวกเลขโดด คือ 3 + 2 = 5

12 ผลบวกเลขโดดคือ 1 + 2 = 3

และคำตอบ 44 ผลบวกเลขโดด คือ 4 + 4 = 8

ดังนั้น การตรวจผลเฉลย

นำมาจากผลบวกเลขโดดของสองจำนวนที่นำมาบวกกัน

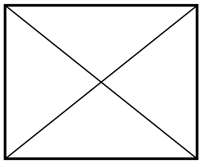
นั่นคือ 5 + 3 = 8 ซึ่งเท่ากับผลบวกเลขโดดของคำตอบ คือ

สรุปขั้นตอนการคิดดังนี้

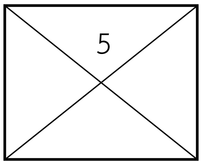
1. หาผลบวกเลขโดดของตัวตั้งและตัวบวก
2. นำผลบวกเลขโดดของตัวตั้งไปบวกกับผลบวกเลขโดดของตัวบวก และหาผลบวกเลขโดดของผลลัพธ์นี้อีกครั้ง
3. หาผลบวกเลขโดดของคำตอบของเลขสองจำนวนที่นำมาบวกกันนั้น
4. ตรวจสอบผลบวกเลขโดดของคำตอบของสองจำนวนที่บวกกันนั้นว่าเท่ากับผลบวกเลขโดดของตัวตั้งไปบวกกับผลบวกเลขโดดของตัวบวกหรือไม่ ถ้าเท่ากันแสดงว่าคิดได้ถูกต้อง

การตรวจผลเฉลยของการดำเนินการบวกสามารถสังเคราะห์นำไปสร้างตารางได้ ดังนี้

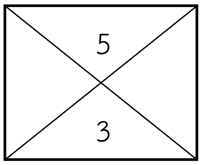
ขั้นที่ 1 เขียนตารางและลากเส้นทแยงมุมเกิดรูปสามเหลี่ยม 4 รูป



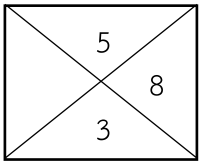
ขั้นที่ 2 หาผลบวกเลขโดดของตัวตั้ง 32 คือ 3 + 2 = 5 นำ 5 ไปเขียนไว้ที่สามเหลี่ยมด้านบน



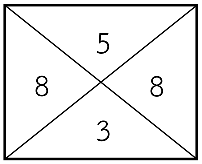
ขั้นที่ 3 หาผลบวกเลขโดดของตัวบวก 12 คือ 1 + 2 = 3 นำ 3 ไปเขียนไว้ที่สามเหลี่ยมด้านล่าง



ขั้นที่ 4 หาผลบวกของตัวเลขสามเหลี่ยมบนกับสามเหลี่ยมล่าง 5 + 3 = 8 ไปเขียนไว้ที่สามเหลี่ยมด้านขวา



ขั้นที่ 5 หาผลบวกเลขโดดของคำตอบ 4 + 4 = 8 นำ 8 ไปเขียนไว้ที่สามเหลี่ยมด้านซ้าย



หมายเหตุ ตัวเลขของสามเหลี่ยมด้านซ้ายและขวาเท่ากัน แสดงว่าผลบวกนั้นถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของ 365 กับ 208 และตรวจผลเฉลยด้วยการหาผลบวกเลขโดด

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} 365 & \rightarrow & 5 \\ \underline{208}\ + & \rightarrow & \underline{1}\ + \\ 0013 & & \underline{6} \\ \underline{56} & & \\ \underline{\underline{573}} & & \end{array}$$

การตรวจผลเฉลย

ขั้นที่ 1 เราได้คำตอบ 573

ขั้นที่ 2 หาผลบวกเลขโดดของ 365 และ 208 คือ 5, 1

ขั้นที่ 3 หาผลบวกของ 5 และ 1 ได้ 6

ขั้นที่ 4 ผลบวกเลขโดดของ 573 เท่ากับ 6 ซึ่งสอดคล้องกับ 6 ที่ได้ในข้อ 3

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของ 279 กับ 121 และตรวจผลเฉลยด้วยการหาผลบวกเลขโดด

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} 279 & \rightarrow & 9 \\ \underline{121}\ + & \rightarrow & \underline{4}\ + \\ 0010 & & \underline{4} \\ \underline{39} & & \\ \underline{\underline{400}} & & \end{array}$$

การตรวจผลเฉลย

ขั้นที่ 1 เราได้คำตอบ 400

ขั้นที่ 2 หาผลบวกเลขโดดของ 279 และ 121 คือ 9, 4

ขั้นที่ 3 หาผลบวกของ 9 และ 4 ได้ 13 และ 1+3 = 4

ขั้นที่ 4 ผลบวกเลขโดดของ 400 เท่ากับ 4 ซึ่งสอดคล้องกับ 4 ที่ได้ในข้อ 3

แบบฝึกหัดชุดที่ 4

จงหาผลบวกของสองจำนวนต่อไปนี้พร้อมตรวจสอบคำตอบด้วยวิธีผลบวกเลขโดด

1) $\begin{array}{r} 66\ + \\ \underline{77} \end{array}$	2) $\begin{array}{r} 57\ + \\ \underline{29} \end{array}$	3) $\begin{array}{r} 48\ + \\ \underline{99} \end{array}$
4) $\begin{array}{r} 35\ + \\ \underline{47} \end{array}$	5) $\begin{array}{r} 56\ + \\ \underline{27} \end{array}$	6) $\begin{array}{r} 59\ + \\ \underline{35} \end{array}$

7) $\begin{array}{rl} 304 & + \\ 271 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	8) $\begin{array}{rl} 787 & + \\ 187 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	9) $\begin{array}{rl} 389 & + \\ 55 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$
10) $\begin{array}{rl} 52 & + \\ 24 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	11) $\begin{array}{rl} 78 & + \\ 87 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	12) $\begin{array}{rl} 66 & + \\ 48 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$
13) $\begin{array}{rl} 5131 & + \\ 676 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	14) $\begin{array}{rl} 8569 & + \\ 7292 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	15) $\begin{array}{rl} 55555 & + \\ 77777 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$
16) $\begin{array}{rl} 456 & + \\ 333 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	17) $\begin{array}{rl} 188 & + \\ 277 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$	18) $\begin{array}{rl} 55555 & + \\ 777 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

2. การดำเนินการลบ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการลบแบบเวทคณิตมี 5 เรื่อง ดังนี้ การดำเนินการลบจากทางซ้ายไปทางขวา เทคนิคการดำเนินการลบเลขโดยใช้จุด (•) แทนสิบ การประยุกต์สูตรที่ 2 ของเวทคณิต เทคนิคการลบแบบเวทคณิต และการตรวจสอบคำตอบ ซึ่งแต่ละเรื่องมีรายละเอียดดังนี้

1. การดำเนินการลบจากทางซ้ายไปทางขวา
2. เทคนิคการดำเนินการลบเลขโดยใช้จุด (•) แทนสิบ
3. การประยุกต์สูตรที่ 2 ของเวทคณิต
    - 3.1 จำนวนบาร์
    - 3.2 จำนวนวินคิวลัม
    - 3.3 การดำเนินการเปลี่ยนจำนวนวินคิวลัมกลับไปเป็นจำนวนปกติ
    - 3.4 จำนวนลบเขียนอยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม
    - 3.5 จำนวนทศนิยมเขียนอยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม
    - 3.6 การดำเนินการบวกของจำนวนวินคิวลัม
    - 3.7 การดำเนินการลบของจำนวนวินคิวลัม
4. เทคนิคการลบแบบเวทคณิต
    - 4.1 การลบแบบทั่วไป
    - 4.2 การดำเนินการบวกและการลบแบบระคน
5. การตรวจสอบคำตอบ
    - 5.1 การตรวจสอบคำตอบจากการดำเนินการการบวก
    - 5.2 การตรวจสอบคำตอบจากการดำเนินการการลบ
    - 5.3 การตรวจสอบคำตอบจากการดำเนินการการบวกและการลบระคน
    - 5.4 การตรวจสอบจำนวนวินคิวลัม

1. การดำเนินการลบจากทางซ้ายไปทางขวา

การดำเนินการลบโดยการคิดเลขเริ่มต้นจากซ้ายไปขวา **เมื่อตัวตั้งมากกว่าตัวลบ** ก่อนที่จะใส่คำตอบของแต่ละหลักต้องพิจารณาการลบของหลักถัดไป

- ถ้าตัวตั้งมากกว่าตัวลบสามารถลบเลขโดดในหลักที่กำลังดำเนินการลบได้เลย
- ถ้าตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบต้องลดค่าของตัวตั้งไป 1 แล้วนำ 1 ไปใส่บนเลขโดดของตัวตั้งของหลักถัดไปทางขวาที่น้อยกว่าตัวลบ และนำตัวตั้งที่ลดลงไป 1 ลบกับตัวลบในหลักที่กำลังดำเนินการลบ
- ถ้าตัวตั้งเท่ากับตัวลบต้องพิจารณาว่าจะลดหรือไม่ขึ้นอยู่กับหลักถัดไปตามกระบวนการข้างต้น

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $769845-432134$

วิธีทำ

$$\begin{array}{l} 7\,6\,9\,8\,4\,5 \\ \underline{4\,3\,2\,1\,3\,4}\;\; - \\ \underline{\underline{3\,3\,7\,7\,1\,1}} \end{array}$$

จากตัวอย่าง ดำเนินการลบจากซ้ายไปขวา พิจารณาเห็นได้ว่า ตัวตั้งมากกว่าตัวลบทุกตำแหน่ง จึงสามารถใส่คำตอบได้เลย

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $35567-11828$

วิธีทำ

$$\begin{array}{l} 3\,5\,5\,6\,7 \\ \underline{1\,1\,8\,2\,8}\;\; - \\ \underline{\underline{2\qquad\;\;}} \end{array}$$

ขั้นที่ 1 ดำเนินการลบจากซ้ายไปขวา คือ เริ่มลบจากหลักแรกทางซ้ายทีละหลักไปทางขวา หลักแรกตัวตั้งมากกว่าตัวลบ $3-1=2$ แต่ก่อนจะใส่คำตอบ 2 ต้องพิจารณาหลักถัดไปทางขวาว่าตัวตั้งมากกว่าตัวลบหรือไม่ ในกรณีนี้ 5 มากกว่า 1 ดังนั้นจึงใส่คำตอบ 2 ที่หลักหมื่น

$$\begin{array}{l} 3\,5\;{}^{1}5\,6\,7 \\ \underline{1\,1\;\;8\,2\,8}\;\; - \\ \;\;\underline{\underline{2\,3\qquad}} \end{array}$$

ขั้นที่ 2 ในหลักถัดไป $5-1=4$ แต่เมื่อพิจารณาหลักถัดไป ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ (5 น้อยกว่า 8) ดังนั้นต้องลดค่า 5 ไป 1 เหลือ 4 แล้วนำ 1 ไปใส่บนเลขโดดถัดไป คือ 5 ซึ่งหมายถึง 15 แล้วดำเนินการลบในหลักนี้ $4-1=3$ ใส่คำตอบ 3 ที่หลักพัน

$$\begin{array}{l} 3\,5\;{}^{1}5\,6\,7 \\ \underline{1\,1\;\;8\,2\,8}\;\; - \\ \;\;\underline{\underline{2\,3\;\;7\qquad}} \end{array}$$

ขั้นที่ 3 หลักถัดไป $15-8=7$ แต่ก่อนจะใส่คำตอบ 7 ต้องตรวจสอบหลักถัดไปทางขวาว่าตัวตั้งมากกว่าตัวลบหรือไม่ ในกรณีนี้ 6 มากกว่า 2 ดังนั้นจึงใส่คำตอบ 7 ที่หลักร้อย

$$\begin{array}{l} 3\,5\;{}^{1}5\,6\;{}^{1}7 \\ \underline{1\,1\;\;8\,2\;\;8}\;\; - \\ \underline{\underline{2\,3\;\;7\;\;3\quad}} \end{array}$$

ขั้นที่ 4 ในหลักถัดไป $6-2=4$ แต่เมื่อพิจารณาหลักถัดไปตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ (7 น้อยกว่า 8) ดังนั้นต้องลดค่า 6 ไป 1 เหลือ 5 แล้วนำ 1 ไปใส่บนเลขโดดตัวถัดไป คือ 7 ซึ่งหมายถึง 17 แล้วดำเนินการลบในหลักนี้ $5-2=3$ ใส่คำตอบ 3 ที่หลักสิบ

$$\begin{array}{r} 3\,5\,{}^{1}5\,6\,{}^{1}7 \\ \underline{1\,1\;\;8\,2\;\;8} \\ \underline{\underline{2\,3\;\;7\;\;3\;\;9}} \end{array} -$$

ขั้นที่ 5 ในหลักถัดไปเป็น $17-8=9$ ใส่คำตอบ 9 ที่หลักหน่วย

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $535-138$

วิธีทำ

$$\begin{array}{l} 5\,{}^{1}3\,5 \\ \underline{1\,3\,8} \\ \underline{\underline{3\quad\;\;}} \end{array} -$$

ขั้นที่ 1 ดำเนินการลบจากซ้ายไปขวา $5-1=4$ แต่เมื่อพิจารณาหลักถัดไป พบว่าตัวตั้งเท่ากับตัวลบ ในกรณีเช่นนี้ ต้องพิจารณาหลักถัดไปอีก นั่นคือหลักที่ 3 พบว่า หลักที่ 3 ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ ดังนั้นต้องลดค่า 5 ไป 1 เหลือ 4 แล้วนำ 1 ไปใส่ไปบนเลขโดดตัวถัดไป คือ 3 ซึ่งหมายถึง 13 แล้วดำเนินการลบในหลักนี้ $4-1=3$ ใส่คำตอบ 3 ที่หลักร้อย

$$\begin{array}{l} 5\,{}^{1}3\,{}^{1}5 \\ \underline{1\,3\,8} \\ \underline{\underline{3\,9\quad}} \end{array} -$$

ขั้นที่ 2 ในหลักถัดไป $13-3=10$ แต่เมื่อพิจารณาหลักถัดไป ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ (5 น้อยกว่า 8) ดังนั้นต้องลดค่า 13 ไป 1 เหลือ 12 แล้วนำ 1 ไปใส่ไปบนเลขโดดตัวถัดไป คือ 5 ซึ่งหมายถึง 15 แล้วดำเนินการลบในหลักนี้ $12-3=9$ ใส่คำตอบ 9 ที่หลักสิบ

$$\begin{array}{l} 5\,{}^{1}3\,{}^{1}5 \\ \underline{1\;\;3\;\;8} \\ \underline{\underline{3\;\;9\;\;7}} \end{array} -$$

ขั้นที่ 3 ในหลักถัดไป $15-8=7$ ใส่คำตอบ 7 ที่หลักหน่วย

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

1. จงดำเนินการลบของสองจำนวนต่อไปนี้โดยคิดจากทางซ้ายไปทางขวา

1) $\begin{array}{r} 6\,2 \\ \underline{4\,7} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{array} -$ 2) $\begin{array}{r} 7\;\;5 \\ \underline{2\;\;8} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{array} -$ 3) $\begin{array}{r} 5\;\;1 \\ \underline{1\;\;5} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{array} -$ 4) $\begin{array}{r} 6\;\;7 \\ \underline{3\;\;8} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{array} -$

5) $\begin{array}{r} 4\,6 \\ \underline{2\,5} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{array} -$ 6) $\begin{array}{r} 6\;\;5 \\ \underline{3\,7} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{array} -$ 7) $\begin{array}{r} 9\;\;0 \\ \underline{6\,2} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{array} -$ 8) $\begin{array}{r} 8\;\;2 \\ \underline{3\,8} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{array} -$

9) $\begin{array}{r} 444 \\ \underline{183} \end{array} -$

10) $\begin{array}{r} 63 \\ \underline{28} \end{array} -$

11) $\begin{array}{r} 813 \\ \underline{345} \end{array} -$

12) $\begin{array}{r} 695 \\ \underline{368} \end{array} -$

13) $\begin{array}{r} 51 \\ \underline{38} \end{array} -$

14) $\begin{array}{r} 3456 \\ \underline{281} \end{array} -$

15) $\begin{array}{r} 7117 \\ \underline{1771} \end{array} -$

16) $\begin{array}{r} 8008 \\ \underline{3839} \end{array} -$

17) $\begin{array}{r} 6336 \\ \underline{3388} \end{array} -$

18) $\begin{array}{r} 14285 \\ \underline{7148} \end{array} -$

19) $\begin{array}{r} 51015 \\ \underline{27986} \end{array} -$

20) $\begin{array}{r} 9630369 \\ \underline{3690963} \end{array} -$

2. การดำเนินการลบโดยใช้จุด (•) แทนสิบ (Vedic Shudhikaran)

การดำเนินการลบโดยใช้จุด (•) แทนสิบ เป็นการปรับเปลี่ยนการลบเป็นการบวก และทำให้การลบง่ายขึ้น นำมาใช้ในกรณีตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $57-32$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 5\,7\ - \\ \underline{3\,2} \\ \underline{\underline{5}} \end{array} \Rightarrow$$

ขั้นที่ 1 พิจารณาเลขโดดหลักหน่วย 7 มากกว่า 2 ดังนั้น $7-2=5$ ไม่จำเป็นต้องใช้วิธีลบ กระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran) การใช้จุด (•) แทนสิบ)

$$\begin{array}{r} 5\,7\ \\ \underline{3\,2}\,- \\ \underline{\underline{2\,5}} \end{array} \Rightarrow$$

ขั้นที่ 2 ตัวเลขหลักสิบ 5 มากกว่า 3 ดังนั้น $5-3=2$ ไม่จำเป็นต้องใช้วิธี กระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran) ดังนั้นคำตอบคือ 25

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $42-27$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 4\,2\ - \\ \underline{\dot{2}\,7} \\ \underline{\underline{5}} \end{array} \Rightarrow$$

ขั้นที่ 1 พิจารณาเลขโดดหลักหน่วย 2 น้อยกว่า 7 ดังนั้น จำเป็นต้องใช้วิธี กระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran)

(a) ใส่จุด (•) บนเลขโดดถัดไปข้างหน้า (ในที่นี้ คือ 2) เป็น $\dot{2}$

(b) นำ 7 ลบออกจาก 10 โดยพิจารณาว่า 7 น้อยกว่า 10 เท่าไร $(10-7=3)$ **เรียก 3 ว่าตัวเติมเต็มสิบของ 7 (complement of the digit)**

(c) นำ 3 ที่เป็นตัวเติมเต็มสิบของ 7 ไปบวกกับตัวตั้งหลักเดียวกัน ในที่นี้คือ 2 ดังนั้น ได้ $3+2=5$

(d) ใส่ผลลัพธ์ 5 เป็นคำตอบที่หลักหน่วย

$$\begin{array}{r} 4\,2\ - \\ \underline{\dot{2}\,7} \\ \underline{\underline{1\,5}} \end{array} \Rightarrow$$

ขั้นที่ 2 พิจารณาหลักสิบ

(a) เมื่อตัวเลขที่มีจุดอยู่ข้างบน $\dot{2}$ ต้องเพิ่มหรือทดค่าให้อีก 1

(b) นำ $2+1=3$ ที่หลักสิบ

(c) พิจารณา พบว่าตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ไม่จำเป็นต้องใช้วิธี กระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran)

(d) คำนวณหาผลลบ $4-3=1$ ใส่ผลลัพธ์ 1เป็นคำตอบที่หลักสิบ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $415-208$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 4\;1\;5 \\ -\;\; 2\;\dot{0}\;8 \\ \hline 7 \\ \hline\hline \end{array}$$

→

ขั้นที่ 1 พิจารณาหลักหน่วย 5 น้อยกว่า 8 ดังนั้น จำเป็นต้องใช้วิธี กระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran)

(a) ใส่จุด (•) บนเลขโดดถัดไปข้างหน้า (ในที่นี้ คือ 0) เป็น $\dot{0}$

(b) นำ 8 ไปลบออกจาก 10 พิจารณาว่า 8 น้อยกว่า 10 เท่าไร ($10-8=2$) ซึ่ง 2 เป็นตัวเต็มสิบของ 8

(c) นำ 2 ที่เป็นตัวเติมเต็มสิบของ 8 บวกกับตัวตั้งหลักเดียวกัน ในที่นี้คือ 5 ดังนั้น ได้ $2+5=7$

(d) ใส่ผลลัพธ์ 7 เป็นคำตอบที่หลักหน่วย

$$\begin{array}{r} 4\;1\;5 \\ -\;\; 2\;\dot{0}\;8 \\ \hline 0\;7 \\ \hline\hline \end{array}$$

→

ขั้นที่ 2 พิจารณาหลักสิบ

(a) เมื่อตัวเลขที่มีจุดอยู่ข้างบน $\dot{0}$ ต้องเพิ่มหรือทดค่าอีก $\dot{2}$

(b) นำ $0+1=1$ ในกรณีนี้คือ $\dot{0}=1$

(c) พิจารณาพบว่าตัวตั้งมากกว่าตัวลบไม่จำเป็นต้องใช้วิธีกระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran)

(d) คำนวณหาผลลบของ $1-1=0$ ใส่ผลลัพธ์ 0 เป็นคำตอบที่หลักสิบ

$$\begin{array}{r} 4\;1\;5 \\ -\;\; 2\;\dot{0}\;8 \\ \hline 2\;0\;7 \\ \hline\hline \end{array}$$

→

ขั้นที่3 พิจารณาที่หลักร้อยพบว่า 4 มากกว่า 2
ดังนั้น หาคำตอบได้คือ $4-2=2$ ใส่ผลลัพธ์ 2 เป็นคำตอบที่หลักร้อย

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $3752-1871$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ 5\ 2\ - \\ \underline{1\ 8\ 7\ 1} \\ \underline{\underline{\qquad 1}} \end{array}$$

ขั้นที่ 1 พิจารณาหลักหน่วยจะเห็นได้ว่า 2 มากกว่า1 ไม่จำเป็นต้องใช้วิธีกระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran) ดังนั้น $2-1=1$ใส่ผลลัพธ์ 1 ใน

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ 5\ 2\ - \\ \underline{1\ \dot{8}\ 7\ 1} \\ \underline{\underline{8\ 1}} \end{array}$$

ขั้นที่ 2 พิจารณาหลักสิบ 5 น้อยกว่า 7 จำเป็นต้องใช้วิธี กระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran)

(a) ใส่จุด (•) บนเลขโดดของตัวลบถัดไปข้างหน้า (ในที่นี้ คือ0)เป็น $\dot{0}$

(b) นำ 7 ไปลบออกจาก 10 พิจารณาว่า 7 น้อยกว่า 10 เท่าไร (10-7=3) ซึ่ง 3 ตัวเติมเต็มสิบของ 7

(c) นำ 3 ที่เป็นตัวเติมเต็มสิบของ บวกกับตัวตั้งหลักเดียวกัน ในที่นี้ คือ5 ดังนั้น ได้ $3+5=8$

(d) ใส่ 8 ในหลักสิบ

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ 5\ 2\ - \\ \underline{\dot{1}\ \dot{8}\ 7\ 1} \\ \underline{\underline{8\ 8\ 1}} \end{array}$$

ขั้นที่ 3 พิจารณาหลักร้อย 7 น้อยกว่า8 จำเป็นต้องใช้วิธี Shudhikaran

(a) เมื่อตัวเลขที่มีจุดอยู่ข้างบน $\dot{8}$ ต้องเพิ่มหรือทดค่าอีก $\dot{2}$

(b) นำ 8+1 = 9 ที่หลักร้อย

(c) พิจารณาพบว่า ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ จำเป็นต้องใช้วิธี กระบวนการสุทธิการัน (Shudhikaran)

(d) ใส่จุด (•) บนเลขโดดของตัวลบถัดไปข้างหน้า (ในที่นี้ คือ 1)เป็น $\dot{1}$

(e) นำ 9 ไปลบออกจาก 10 พิจารณาว่า 9 น้อยกว่า 10 เท่าไร (10-9 = 1) ซึ่ง 1 เป็นตัวเติมเต็มสิบของ 9

(f) นำ1 ที่เป็นตัวเติมเต็มสิบของ9 ไปบวกกับตัวตั้งหลักเดียวกันในที่นี้ คือ 7 ดังนั้นได้ $1+7=8$

(g) ใส่ผลลัพธ์ 8 ในหลักร้อย

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ 5\ 2\ - \\ \underline{\dot{1}\ \dot{8}\ 7\ 1} \\ \underline{\underline{1\ 8\ 8\ 1}} \end{array}$$

ขั้นที่ 4 พิจารณาหลักพัน

(a) เมื่อตัวเลขที่มีจุดอยู่ข้างบน $\dot{1}$ ต้องเพิ่มหรือทดค่าให้อีก 1

(b) นำ 1+1 = 2 ที่หลักพัน

(c) พิจารณาพบว่า ตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ไม่จำเป็นต้องใช้วิธี Shudhikaran

(d) คำนวณหาผลลบของ $3-2=1$

(e) ใส่ผลลัพธ์ 1 ในหลักพัน

สรุป

1. การดำเนินการลบแบบเวทคณิต โดยใช้จุดแทนจำนวนสิบ วิธีข้างต้นนี้จะง่ายกว่าวิธีปกติ และยิ่งไปกว่านั้น ถ้าตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบจะง่ายและรวดเร็ว เพราะเนื่องจากไม่มีการทด

2. เมื่อตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบการหาผลลัพธ์การลบแทนที่จะลบตรง ๆ แบบปกติ แต่กลับใช้วิธีหาจำนวนหรือตัวเติมเต็มสิบของตัวลบ แล้วนำตัวเลขที่เป็นตัวเติมเต็มไปบวกกับตัวตั้ง ดังตัวอย่างข้างต้นจึงเป็นการเปลี่ยนการลบเป็นการบวก

บทนิยาม ตัวเติมเต็มของตัวเลขโดด (complement of the digit) คือ ค่าเบี่ยงฐานสิบของตัวเลขโดดนั้นหรือค่าทบสิบของตัวเลขโดดนั้น เช่น ตัวเติมเต็มสิบของตัวเลขโดด 7 คือ 3

ตัวเติมเต็มสิบของตัวเลขโดด 1 คือ 9

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

1. จงดำเนินการลบของสองจำนวนต่อไปนี้โดยใช้วิธี Shudhikaran

1) 36 − 28	2) 324 − 115	3) 437 − 269	4) 506 − 107
5) 728 − 89	6) 8472 − 3796	7) 49062 − 8648	8) 87211 − 3088
9) 98356 − 79467	10) 864237 − 270038	11) 680032 − 68810	
12) 10000000 − 8764321	13) 6011123 − 5020034	14) 100000000 − 99999999	

2. ตรวจสอบว่าการแสดงใส่จุดตามวิธี Shudhikaran ในการดำเนินการลบถูกต้องหรือไม่

1) $\begin{array}{rl} 25 & \\ 2\dot{2} & - \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{rl} 86 & \\ \dot{3}4 & - \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{rl} 32 & \\ \dot{2}1 & - \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{rl} 78 & \\ \dot{6}9 & - \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 5) $\begin{array}{rl} 33 & \\ 2\dot{3} & - \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

3. จงตรวจสอบว่าการดำเนินการลบต่อไปนี้ว่าจำเป็นต้องใช้วิธี **Shudhikaran** หรือไม่

1) $\begin{array}{rl} 36 & - \\ 24 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{rl} 24 & - \\ 16 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{rl} 20 & - \\ 11 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{rl} 38 & - \\ 20 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 5) $\begin{array}{rl} 93 & - \\ 33 & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

4. จงตรวจสอบว่าเฉลยการดำเนินการลบต่อไปนี้ว่าถูกต้องหรือไม่

1) $\begin{array}{rl} 36 & \\ \dot{2}4 & - \\ \hline 12 & \\ \hline\hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{rl} 33 & \\ \dot{2}4 & - \\ \hline 09 & \\ \hline\hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{rl} 30 & \\ \dot{2}7 & - \\ \hline 03 & \\ \hline\hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{rl} 28 & \\ \dot{1}9 & - \\ \hline 19 & \\ \hline\hline \end{array}$ 5) $\begin{array}{rl} 38 & \\ \dot{2}9 & - \\ \hline 09 & \\ \hline\hline \end{array}$

5. จงวงกลมตัวเลขที่จุดตรงตามตำแหน่งที่ผิดของวิธี Shudhikaran ของการดำเนินการต่อไปนี้ และหาผลเฉลยที่ถูกต้อง

1) $\begin{array}{rl} 37209 & \\ \dot{1}9\dot{1}\dot{1}7 & - \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{rl} 27569 & - \\ \dot{0}\dot{8}4\dot{7}\dot{7} & \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{rl} 78952 & \\ 2\dot{9}\dot{7}\dot{7}8 & - \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

3. การประยุกต์สูตรที่ 2 ของเวทคณิต (All from 9 And The Last from 10)

การลบสองวิธีข้างต้นเหมาะกับจำนวนที่เป็นตัวตั้งมากกว่าจำนวนที่เป็นตัวลบ ในกรณีที่จำนวนที่เป็นตัวตั้งมากกว่าจำนวนที่เป็นตัวลบ ในเวทคณิตมีเทคนิคนำสูตรที่ 2 Nikilam Navatashcaramam Dashatah มาใช้

เนื่องจากความรู้เรื่องวงกลมเก้าจุดและวงกลมสิบจุด เป็นการคิดเลขในระบบฐานสิบกล่าวคือ เป็นการนำจำนวน 2 จำนวน มาบวกกันจึงเกิดความรู้ขั้นพื้นฐาน **การบวกทบสิบและการบวกทบเก้า** ซึ่งนำไปสู่สูตรที่ 2 ของเวทคณิตคือ **นิขิลัมสูตร (Nikhilam Sutra)**

สูตรที่ 2 ของเวทคณิตเป็นภาษาสันสกฤต นิขิลัมสูตร (Nikhilam Sutra) หรือนิขิลัม(นิขิล์) ย่อมาจาก “นิขิลัม นวตัศจรมัม ทศตะ สูตระ (All from 9 and the Last from 10)” แปลว่า “ทั้งหมดจาก 9 แต่สุดท้ายจาก 10 ” หรือ “ทุกตัวทบ 9 แต่ตัวสุดท้ายทบ 10 ”

ในชีวิตประจำวันมีการจับจ่ายใช้สอย โดยใช้ธนบัตรเป็นสิ่งแลกเปลี่ยน ในแต่ละประเทศค่าของธนบัตรคล้าย ๆ กัน ประเทศไทยมีธนบัตรใบละ 10 บาท 20 บาท 50 บาท 100 บาท 500 บาท และ 1,000 บาท

สมมติ ซื้อของ ราคา 487 บาท จ่ายด้วยธนบัตร 1,000 บาท ในการทอนเงิน จะต้องทอนเท่ากับ 513 บาท เมื่อพิจารณาจะพบว่ากำลังใช้วิธีคิด “ทุกตัวทบ 9 แต่ตัวสุดท้ายทบ 10 ” นั่นคือ ตัวเลขตัวสุดท้ายของ 487 คือ 7 แล้วมีจำนวนใดที่บวกกับ 7 แล้วได้ 10 คือ 3(เรียก 3 ว่าเป็นตัวเติมเต็มสิบของ 7 หรือ เรียก 3 ว่าเป็นตัวเติมเต็มของ 7 ทบ 10) ส่วนตัวเลขที่เหลือจาก 7 ของ 487 ทุกตัว คือ 4 และ 8 แต่ละตัวมีจำนวนใดที่บวกกับ 4 และ 8 แล้วได้ 9 คือ 5 และ 1 ตามลำดับ (เรียก 5 และ 1 ว่าเป็นตัวเติมเก้าของ 4 และ 8 หรือ เรียก 5 และ 1 ว่าเป็นตัวเติมเต็มของ 4 และ 8 ทบ 9)

ดังนั้น เงินทอนคือ 513

ตัวอย่างที่ 1 ใช้วิธี “ทุกตัวทบ 9 แต่ตัวสุดท้ายทบ 10 ” หาตัวเติมเต็มของจำนวนต่อไปนี้

$$\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 8 & 7 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 3 & 8 & 8 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 1 & 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 9 & 0 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 9 & 0 & 9 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 & 0 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 9 & 7 & 8 & 6 & 5 & 9 & 1 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 ใช้วิธี “ทุกตัวทบ 9 แต่ตัวสุดท้ายทบ 10 ” หาจำนวนเติมเต็มของจำนวนต่อไปนี้

$$\begin{array}{cc} 6 & 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 4 & 7 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 8 & 2 & 6 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 7 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 9 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccc} 6 & 0 & 7 & 0 & 1 & 9 & 0 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 9 & 2 & 9 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

ข้อสังเกต จากสองตัวอย่างข้างต้น ถ้านำจำนวนที่กำหนดให้บวกกับตัวเติมเต็มของจำนวนนั้นจะได้ผลลัพธ์ในระบบฐานสิบ

บทนิยาม ในที่นี้เลขฐาน (Base Number) คือ จำนวนผลลัพธ์ของ 10^n ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนนับ
ได้แก่ $10, 100 = 10^2, 1000 = 10^3, 10000 = 10^4, \ldots$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลต่างจากเลขฐานที่กำหนดให้ต่อไปนี้

วิธีทำ เนื่องจาก $100 - 76$ โดยการใช้นิขิลัมสูตร (All from 9 And The Last from 10) คิดกับ 76 คือ หาผลลัพธ์ตัวเติมเต็มเก้าของ 7 คือ 2 และตัวเติมเต็มสิบของ 6 คือ 4 คิดจากซ้ายไปทางขวา

ดังนั้น $100 - 76 = 24$

ในทำนองเดียวกัน $1000 - 874 = 126$

$1000 - 307 = 693$

$1000 - 580 = 420$

$10000 - 6532 = 3468$

แบบฝึกหัดชุดที่ 3

1. ใช้วิธี “ทุกตัวทบ 9 แต่ตัวสุดท้ายทบ 10 ” หาตัวเติมเต็มของจำนวนต่อไปนี้

1) 444 2) 675 3) 2486 4) 18276

5) 8998 6) 9888 7) 1020304 8) 7

2. ใช้วิธี “ทุกตัวทบ 9 แต่ตัวสุดท้ายทบ 10 ” หาตัวเติมเต็มของจำนวนต่อไปนี้

1) 3570 2) 920 3) 1234560 4) 3300

3. จงดำเนินการลบโดยใช้นิขิลัมสูตร “ทุกตัวทบ 9 แต่ตัวสุดท้ายทบ 10 ”

1) $\begin{array}{rl} 1\,0\,0 & - \\ \underline{7\,6} & \\ \hline\hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{rl} 1\,0\,0 & - \\ \underline{4\,7} & \\ \hline\hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{rl} 1\,0\,0\,0 & - \\ \underline{6\,3\,8} & \\ \hline\hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{rl} 1\,0\,0\,0 & - \\ \underline{3\,2\,7} & \\ \hline\hline \end{array}$

5) $\begin{array}{rl} 1\,0\,0\,0 & - \\ \underline{7\,5\,7} & \\ \hline\hline \end{array}$ 6) $\begin{array}{rl} 1\,0\,0\,0 & - \\ \underline{8\,4\,6} & \\ \hline\hline \end{array}$ 7) $\begin{array}{rl} 1\,0\,0\,0 & - \\ \underline{9\,9\,8} & \\ \hline\hline \end{array}$ 8) $\begin{array}{rl} 1\,0\,0\,0 & - \\ \underline{8\,8\,9} & \\ \hline\hline \end{array}$

$$9)\ \begin{array}{r} 10000 \\ -\ 6387 \\ \hline \end{array}\qquad 10)\ \begin{array}{r} 10000 \\ -\ 3377 \\ \hline \end{array}\qquad 11)\ \begin{array}{r} 10000 \\ -\ 456 \\ \hline \end{array}\qquad 12)\ \begin{array}{r} 10000 \\ -\ 275 \\ \hline \end{array}$$

$$13)\ \begin{array}{r} 100000 \\ -\ 84576 \\ \hline \end{array}\qquad 14)\ \begin{array}{r} 100000 \\ -\ 94998 \\ \hline \end{array}\qquad 15)\ \begin{array}{r} 100000 \\ -\ 3586 \\ \hline \end{array}\qquad 16)\ \begin{array}{r} 100000 \\ -\ 7928 \\ \hline \end{array}$$

$$17)\ \begin{array}{r} 200 \\ -\ 76 \\ \hline 124 \\ \hline\hline \end{array}\qquad 18)\ \begin{array}{r} 200 \\ -\ 47 \\ \hline \end{array}\qquad 19)\ \begin{array}{r} 3000 \\ -\ 638 \\ \hline \end{array}\qquad 20)\ \begin{array}{r} 3000 \\ -\ 327 \\ \hline \end{array}$$

$$21)\ \begin{array}{r} 4000 \\ -\ 757 \\ \hline \end{array}\qquad 22)\ \begin{array}{r} 5000 \\ -\ 846 \\ \hline \end{array}\qquad 23)\ \begin{array}{r} 2000 \\ -\ 998 \\ \hline \end{array}\qquad 24)\ \begin{array}{r} 6000 \\ -\ 889 \\ \hline \end{array}$$

$$25)\ \begin{array}{r} 70000 \\ -\ 6387 \\ \hline \end{array}\qquad 26)\ \begin{array}{r} 50000 \\ -\ 3377 \\ \hline \end{array}\qquad 27)\ \begin{array}{r} 70000 \\ -\ 456 \\ \hline \end{array}\qquad 28)\ \begin{array}{r} 93000 \\ -\ 275 \\ \hline \end{array}$$

$$29)\ \begin{array}{r} 210000 \\ -\ 3586 \\ \hline \end{array}\qquad 30)\ \begin{array}{r} 510000 \\ -\ 7928 \\ \hline \end{array}\qquad 31)\ \begin{array}{r} 510000 \\ -\ 84576 \\ \hline \end{array}\qquad 32)\ \begin{array}{r} 110000 \\ -\ 94998 \\ \hline \end{array}$$

$$33)\ \begin{array}{r} 211000 \\ -\ 43586 \\ \hline \end{array}\qquad 34)\ \begin{array}{r} 511000 \\ -\ 47718 \\ \hline \end{array}\qquad 35)\ \begin{array}{r} 615000 \\ -\ 284576 \\ \hline \end{array}\qquad 36)\ \begin{array}{r} 213500 \\ -\ 94998 \\ \hline \end{array}$$

$$37)\ \begin{array}{r} 214540 \\ -\ 24358 \\ \hline \end{array}\qquad 38)\ \begin{array}{r} 515600 \\ -\ 167928 \\ \hline \end{array}$$

3.1 จำนวนบาร์ (Bar Numbers)

ในเวทคณิต เรามีข้อตกลงกันว่า จำนวนที่เราใช้ในชีวิตปกติประจำวัน ให้เรียกว่า “จำนวนปกติ (general numbers)” ส่วนจำนวนลบมีข้อตกลงให้เขียนอยู่ในรูปเครื่องหมาย – บนตัวเลข (– อ่านว่า บาร์ (bar)) เช่น –7 เขียนแทนด้วย $\bar{7}$ (อ่านว่า บาร์ 7)

จากความรู้เรื่อง “ทุกตัวทบเก้าแต่ตัวสุดท้ายทบสิบ” และการบวกกันได้ 10 สมบูรณ์ หรือ การบวกกันไม่ได้ 10 สมบูรณ์ (Completion or Non - Complement) นำไปประยุกต์เป็นสูตรของการหาค่าเบี่ยงฐานสิบ (Deficiency From Ten) และค่าเบี่ยงฐานนำไปประยุกต์ เขียนจำนวนปกติให้อยู่ในรูปจำนวนที่มีเครื่องหมายบาร์ เช่น 39 **เรียกว่าจำนวนปกติ** เมื่อพิจารณาจำนวน 39 จะเห็นได้ว่ามีค่าใกล้เคียง 40 ต่างกันอยู่ 1 เรียก **1 ว่าค่าเบี่ยงฐานสิบ** เราสามารถเขียน 39 ให้อยู่ในรูปจำนวนที่มีตัวเลขโดดบ้างตัวอยู่ในรูปเลขโดดที่ติดเครื่องหมายบาร์ดังนี้ $39 = 4\bar{1}$ และเรียกจำนวนนี้ว่า จำนวนบาร์(Bar Number)

ในทำนองเดียวกัน 89 เขียนเป็นจำนวนบาร์ $9\bar{1}$ หรือ $1\bar{1}\bar{1}$ เพราะ $89 = 90-1 = 9\bar{1}$ หรือ

$89 = 100-11 = 1\bar{1}\bar{1}$

บทนิยาม จำนวนบาร์ (Bar Numbers) คือจำนวนที่ประกอบด้วยเลขโดดของแต่ละหลักมีทั้งเลขโดดบวกและเลขโดดลบ โดยเลขโดดลบใส่เครื่องหมาย รูป – บนตัวเลข` (– อ่านว่า บาร์ (bar))

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาจำนวนต่อไปนี้

$7\bar{2} = 70-2 = 68$

$86\bar{1} = 860-1 = 859$ โดย 8 ไม่ต้องเปลี่ยน

$127\bar{2} = 1270-2 = 1268$ โดย 12 ไม่ต้องเปลี่ยน

$6\bar{3}0 = 600-30 = 570$ โดย 0 ไม่ต้องเปลี่ยน

ตัวอย่างที่ 2 จงแปลงจำนวนบาร์ $9\bar{2}8\bar{3}$ ให้เป็นจำนวนปกติ

วิธีทำ $90-2 = 9\bar{2} = 88$

$80-3 = 8\bar{3} = 77$

ดังนั้น $9\bar{2}8\bar{3} = 8877$

ตัวอย่างที่ 3 จงแปลงจำนวนบาร์ $13\bar{1}51$ ให้เป็นจำนวนปกติ

วีธีทำ $3\bar{1} = 30-1 = 29$

โดย 1 และ 5 ไม่ต้องเปลี่ยน

ดังนั้น $13\bar{1}51 = 12951$

ตัวอย่างที่ 4 จงแปลงจำนวนบาร์ $2\bar{3}\bar{2}6\bar{1}\bar{1}2$ ให้เป็นจำนวนปกติ

วิธีทำ $2\bar{3}\bar{2}=200-32=168$

$6\bar{1}\bar{1}=600-11=589$

โดย 2 ไม่ต้องเปลี่ยน

ดังนั้น $2\bar{3}\bar{2}6\bar{1}\bar{1}2=1685892$

ตัวอย่างที่ 5 จงแปลงจำนวนบาร์ $3\bar{6}2\bar{2}\bar{7}$ ให้เป็นจำนวนปกติ

วิธีทำ $3\bar{6}=30-6=24$

$2\bar{2}\bar{7}=200-27=173$

ดังนั้น $3\bar{6}2\bar{2}\bar{7}=24173$

3.2 จำนวนวินคิวลัม (Vinculum Numbers)

จากความรู้เรื่อง“ทุกตัวทบ 9 แต่ตัวสุดท้ายทบ 10 ”นำไปใช้แปลงเลขจำนวนบวกหรือจำนวนลบให้อยู่ในรูปจำนวนผสมของจำนวนบวกกับจำนวนลบ โดยใช้เครื่องหมาย (–) อ่านว่า บาร์ (bar) หรือ วินคิวลัม (Vinculum) ในภาษาละติน เช่น

บทนิยาม จำนวนวินคิวลัม (Vinculum NUMBERS) คือจำนวนที่ประกอบด้วยเลขโดดของแต่ละหลักมีทั้งเลขโดดบวกและเลขโดดลบ โดยเลขโดดลบใส่เครื่องหมาย รูป – บนตัวเลข` (– อ่านว่า บาร์ (bar)) และเลขโดดแต่ละหลักต้องที่มีค่าไม่เกิน 5 อยู่ใน

ตัวอย่างที่ 1 จำนวนเต็ม 9 สามารถเขียนได้ในรูป $9=10-1$

หมายถึง 9 น้อยกว่า 10 เขียนแทนด้วย $9=10+\bar{1}=1\bar{1}$ ซึ่งหลักหน่วย $\bar{1}$ หมายถึง -1 และค่าของ 9 กับ $1\bar{1}$ มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงไป สามารถนำไปดำเนินการคิดการบวก ลบ คูณ และหารได้

$9=10-1=10+\bar{1}=1\bar{1}$ $8=10-2=10+\bar{2}=1\bar{2}$ $7=10-3=10+\bar{3}=1\bar{3}$

หรือ $-9=-10+1=\overline{10}+1=\bar{1}1$ $-8=-10+2=\overline{10}+2=\bar{1}2$ $-7=-10+3=\overline{10}+3=\bar{1}3$

$19=20-1=20+\bar{1}=2\bar{1}$ $18=20-2=20+\bar{2}=2\bar{2}$ $17=20-3=20+\bar{3}=2\bar{3}$

หรือ $-19=-20+1=\overline{20}+1=\bar{2}1$ $-18=-20+2=\overline{20}+2=\bar{2}2$ $-17=-20+3=\overline{20}+3=\bar{2}3$

$29=30-1=30+\bar{1}=3\bar{1}$ $28=30-2=30+\bar{2}=3\bar{2}$ $27=30-3=30+\bar{3}=3\bar{3}$

หรือ $-29=-30+1=\overline{30}+1=\bar{3}1$ $-28=-30+2=\overline{30}+2=\bar{3}2$ $-27=-30+3=\overline{30}+3=\bar{3}3$

หมายเหตุ วิธีการวินคิวลัม (Vinculum Process) คือการแปลงจำนวนที่มีเลขโดดที่มีค่าเกิน 5 ให้เป็นจำนวนที่มีเลขโดด ไม่เกิน 5 ในรูป (–) บาร์ (bar) บนตัวเลข เช่น $9819=10\bar{2}2\bar{1}$ เป็นการหาเทคนิคเฉพาะอีกวิธีหนึ่งในเวทคณิต **เรียก** $10\bar{2}2\bar{1}$ **ว่าจำนวนวินคิวลัม และเรียก 9819 ว่าจำนวนปกติ**

บทนิยาม สำหรับจำนวนเต็ม m ใดๆ วินคิวลัมของ m เขียนแทนด้วย $\bar{m}$ (บาร์เอ็ม)
หมายถึง $\bar{m} = -m$

บทนิยาม สำหรับจำนวน m ในระบบเลขฐานสิบ
ถ้า $m = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_{,1}, a_0$ คือเลขโดด
แล้ว $\bar{m} = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0} = \bar{a}_n \bar{a}_{n-1} \bar{a}_{n-2} ... \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0$

สมบัติของการวินคิวลัม

1. $\overline{m+n} = \bar{m} + \bar{n}$
2. $\bar{\bar{m}} = m$ 3. $\overline{m+\bar{n}} = \bar{m} + n$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนจำนวน 3789 ให้อยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม
วิธีทำ โดยวิธีนิขิลัม จะตัวเติมเต็มของเลขโดดสามตัวท้าย คือ $9-7=2, 9-8=1$ และ $10-9=1$ ดังนั้นเลขโดดถัดไปข้างหน้าเพิ่มอีก 1 $(3+1=4)$
ดังนั้น $3789 = 4\bar{2}\bar{1}\bar{1}$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนจำนวน 286923 ให้อยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม
วิธีทำ เมื่อพิจารณา จะเห็นได้ว่าตัวเลขที่มากกว่า 5 คือ 869 โดยวิธีนิขิลัม หาตัวเติมเต็มของ 869 คือ $\bar{1}\bar{3}\bar{1}$
ดั้งนั้น $286923 = 3\bar{1}\bar{3}\bar{1}23$
ข้อสังเกต ตัวเลขสองตัวท้าย คือหลักหน่วย 3 และหลักสิบ 2 มีค่าน้อยกว่า 5 คงไว้ ส่วนเลขโดดถัดไปข้างหน้าเพิ่มอีก 1 $\left(2+1=3\right)$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนจำนวน 353782 ให้อยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม
วิธีทำ เมื่อพิจารณา จะเห็นได้ว่าตัวเลขที่มากกว่า 5 คือ 78 โดยวิธีนิขิลัม หาตัวเติมเต็มของ 78 คือ $\bar{2}\bar{2}$ ส่วนเลขโดดถัดไปข้างหน้าเพิ่มอีก 1 $\left(3+1=4\right)$
ดั้งนั้น $353782 = 354\bar{2}\bar{2}2$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนจำนวน 782893 ให้อยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม
วิธีทำ เมื่อพิจารณา จะเห็นได้ว่าตัวเลขที่มากกว่า 5 คือ 78 และ 89 โดยวิธีนิขิลัม หาตัวเติมเต็มของ 78 และ 89 คือ $\bar{2}\bar{2}$ และ $\bar{1}\bar{1}$
ดั้งนั้น $782893 = 1\bar{2}\bar{2}3\bar{1}\bar{1}3$

ข้อสังเกต จากวิธีใช้นิขิลัมสูตร เลข 89 ต้องเติมเต็มเป็น $\bar{1}\bar{1}$ ตัวเลขที่อยู่ข้างหน้า $\bar{1}\bar{1}$ ต้องเพิ่มอีก 1 ในทำนองเดียวกัน เลข 78 ต้องเติมเต็มเป็น $\bar{2}\bar{2}$ ตัวเลขที่อยู่ข้างหน้า $\bar{2}\bar{2}$ ไม่มี หมายถึงต้องเป็นเลข 0 ต้องเพิ่มอีก 1 เป็น $0+1=1$

3.3 การดำเนินการเปลี่ยนจำนวนวินคิวลัมกลับไปเป็นจำนวนปกติ

เป็นการดำเนินการกระทำตรงกันข้ามกับการแปลงจำนวนปกติไปเป็นจำนวนวินคิวลัม นั่นคือ เลขโดดที่อยู่ข้างหน้าตัวเลขที่มีเครื่องหมายบาร์ ต้องลดค่าลง 1 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแปลงจำนวนวินคิวลัม $3\bar{3}4\bar{4}$ ให้เป็นจำนวนปกติ
วิธีทำ เมื่อพิจารณาเลขโดดตัวเติมเต็มของ $\bar{3}$ คือ 7 และ $\bar{4}$ คือ 6 ต่อไปก็คือ เลขโดดที่อยู่ข้างหน้าตัวเลขที่มีเครื่องหมายบาร์ จะต้องลดค่าลง 1 $(3-1=2)$ และ $(4-1=3)$
ดังนั้น $3\bar{3}4\bar{4} = 2736$

ตัวอย่างที่ 2 จงแปลงจำนวนวินคิวลัม $3\bar{3}\bar{4}\bar{2}$ ให้เป็นจำนวนปกติ
วิธีทำ พิจารณาตัวเลขที่มีเครื่องหมายบาร์สามตัวเป็นกลุ่มสามารถใช้นิขิลัมสูตร เขียนตัวเติมเต็มของตัวเลขกลุ่มนี้ ด้วยวิธีนิขิลัม $(9-3=6),(9-4=5)$ และ $(10-2=8)$ เลขโดดที่อยู่ข้างหน้าตัวเลขที่มีเครื่องหมายบาร์ จะต้องลดค่าลง 1 $(3-1=2)$
ดังนั้น $3\bar{3}\bar{4}\bar{2} = 2658$

ตัวอย่างที่ 3 จงแปลงจำนวนวินคิวลัม $20\bar{3}\bar{4}0\bar{1}\bar{2}1$ ให้เป็นจำนวนปกติ
วิธีทำ พิจารณาตัวเลขที่มีเครื่องหมายบาร์ คือ $\bar{3}\bar{4}$ และ $\bar{1}\bar{2}$ สามารถใช้นิขิลัมสูตร เขียนตัวเติมเต็มของตัวเลขสองกลุ่มนี้ ด้วยวิธีนิขิลัม $(9-3=6),(10-4=6)$ และ $(9-2=7),(10-2=8)$ เลขโดดที่อยู่ข้างหน้าตัวเลขที่มีเครื่องหมายบาร์ จะต้องลดค่าลง 1 $(0-1=\bar{1})$ และ $(0-1=\bar{1})$

$$20\bar{3}\bar{4}0\bar{1}\bar{2}1 = 2\bar{1}66\bar{1}881$$

$$= 19659881 \qquad \text{ดังนั้น} \quad 20\bar{3}\bar{4}0\bar{1}\bar{2}1 = 19659881$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแปลงจำนวนวินคิวลัม $40\bar{2}\bar{1}\bar{3}4$ ให้เป็นจำนวนปกติ
วิธีทำ $40\bar{2}\bar{1}\bar{3}4 = 4\bar{1}7874 = 397874$
ดังนั้น $40\bar{2}\bar{1}\bar{3}4 = 397874$

3.4 จำนวนลบเขียนอยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม

จำนวนลบสามารถเขียนเลขโดดแต่ละหลักของจำนวนนั้น ให้มีค่าไม่เกิน 5 ได้เช่นกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแปลงจำนวน -27489 ให้เป็นจำนวนวินคิวลัม

วิธีทำ $-27489 = \overline{27489}$

ใช้นิขิลัมสูตรในการคิดเลขหาตัวเติมเต็มของตัวเลข ของ $\bar{7}$ และ $\overline{89}$ เลขโดดที่อยู่ข้างหน้าต้องถูกลดค่าลง 1

ดังนั้น $-27489 = \overline{27489} = \bar{3}3\bar{5}11$

ตัวอย่างที่ 2 จงแปลงจำนวน -80379 ให้เป็นจำนวนวินคิวลัม

วิธีทำ $-80379 = \overline{80379}$

ใช้นิขิลัมสูตรในการคิดเลขหาตัวเติมเต็มของตัวเลขของ $\bar{8}$ และ $\overline{79}$ เลขโดดที่อยู่ข้างหน้าต้องถูกลดค่าลง 1

ดังนั้น $-80379 = \overline{80379} = \bar{1}20\bar{4}21$

ตัวอย่างที่ 3 จงแปลงจำนวน -70829 ให้เป็นจำนวนวินคิวลัม

วิธีทำ $-70829 = \overline{70829}$

ใช้นิขิลัมสูตรในการคิดเลขหาตัวเติมเต็มของตัวเลขของ $\bar{7}$, $\bar{8}$ และ $\bar{9}$ เลขโดดที่อยู่ข้างหน้าต้องถูกลดค่าลง 1

ดังนั้น $-70829 = \overline{70829} = \bar{1}3\bar{1}2\bar{3}1$

หมายเหตุ จำนวนเต็มที่มีเลขโดดหลาย ๆ ตัว (หลาย ๆ หลัก) เมื่อพบว่าเลขโดดตัวซ้ายสุดที่ติดเครื่องหมายบาร์ เมื่อเปลี่ยนเลขโดดตัวนั้นเป็นตัวเลขบวกแล้ว จะต้องเพิ่มตัวเลข $\bar{1}$ ทางซ้ายสุดของจำนวนนั้น

สรุปได้ว่า ถ้าเลขโดดซ้ายสุดของ จำนวนเป็นตัวเลขที่มีเครื่องหมายบาร์ จำนวนนั้นจะมีค่าเป็นลบ ทำให้ไม่สามารถเปลี่ยนเลขโดดทุกตัวของจำนวนนั้นให้เป็นตัวเลขบวกทั้งหมดได้

ตัวอย่างที่ 4 จงแปลงจำนวน $\bar{3}78\bar{2}1$ ให้เป็นจำนวนวินคิวลัม $\bar{3}78\bar{2}1 = -3\bar{7}\bar{8}2\bar{1}$

วิธีที่ 1 จาก $a = -(-a)$ พบว่า $\bar{3}78\bar{2}1 = -(-\bar{3}78\bar{2}1)$

$$\bar{3}78\bar{2}1 = -(\bar{\bar{3}}\bar{7}\bar{8}\bar{\bar{2}}\bar{1})$$

$$\bar{3}78\bar{2}1 = -3\bar{7}\bar{8}2\,\bar{1}$$

$$\bar{3}78\bar{2}1 = -22219$$

วิธีที่ 2 เราอาจจะเปลี่ยนตัวเลขบวกให้เป็นตัวเลขติดเครื่องหมายบาร์ตรง ๆ ได้ ดังนี้

$$\bar{3}78\bar{2}1 = \overline{22219}$$

วิธีที่ 3 เราอาจจะเปลี่ยนตัวเลขที่ติดเครื่องหมายบาร์ เป็นตัวเลขบวกเลยดังนี้

$$\bar{3}78\bar{2}1 = \bar{1}77781$$

จากนั้นหาตัวเติมเต็มของเลขโดดบวกทุกตัวจะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนลบ $(-100000 + 77781)$

$$\bar{1}77781 = -22219$$

ข้อสังเกต จะเห็นได้ว่าการใช้วิธีที่ 2 ในการแปลงตัวเลขจะเป็นวิธีที่ตรงและง่ายที่สุด

3.5 จำนวนทศนิยมเขียนอยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม

การเขียนจำนวนทศนิยมให้อยู่ในรูปจำนวนทศนิยมวินคิวลัมยังคงใช้วิธีเดียวกัน เลขโดดหลังจุดทศนิยมไม่เปลี่ยนตำแหน่ง คงอยู่ตำแหน่งเดิม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแปลงจำนวนทศนิยม 120.981 ให้เป็นจำนวนวินคิวลัม

วิธีทำ $120.981 = 121.0\bar{2}1$

ตัวอย่างที่ 2 จงแปลงจำนวนทศนิยม $0.\bar{3}72\bar{8}$ ให้เป็นจำนวนปกติ

วิธีทำ $0.\bar{3}72\bar{8} = -0.3\bar{7}\bar{2}8$

$0.\bar{3}72\bar{8} = -0.2288$

หรือ $0.\bar{3}72\bar{8} = 0.\bar{2}\bar{2}\bar{8}\bar{8} = -0.2288$

หรือ $0.\bar{3}72\bar{8} = \bar{1}.7712 = -0.2288$

แบบฝึกหัดชุดที่ 4

1. จงแปลงจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม

1) 78 2) 59 3) 87 4) 97

5) 99 6) 23 7) 146 8) 197

9) 107 10) 126 11) 158 12) 166

13) 267 14) 209 15) 288 16) 297

17) 279 18) 293 19) 378 20) 306

21) 378 22) 359 23) 349 24) 317

25) 426
26) 459
27) 477
28) 470
29) 492
30) 487
31) 551
32) 599
33) 590
34) 546
35) 597
36) 586
37) 688
38) 635
39) 689
40) 798
41) 734
42) 776
43) 874
44) 808
45) 875
46) 978
47) 929
48) 987
49) 1559
50) 1289
51) 1936
52) 2546
53) 2597
54) 5886
55) 55467
56) 78097
57) 105086
58) 6890785
59) 19096365
60) 67905489
61) 908075709
62) 7945889.98
63) 490734.078
64) 77.664059
65) 874.213456
66) 999868.9998
67) 875789.0909
68) 978990.090807
69) 929.34219
70) 1559.94356
71) 128998.9456
72) 1936.54689069

2. จงแปลงจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปจำนวนวินคิวลัม

1) –78
2) –59
3) –87
4) –97
5) –99
6) –23
7) –146
8) –197
9) –107
10) –126
11) –158
12) –166
13) –267
14) –209
15) –288
16) –297
17) –279
18) –293
19) –378
20) –306
21) –378
22) –359
23) –349
24) –317
25) –426
26) –459
27) –477
28) –470
29) –492
30) –487
31) –551
32) –599
33) –590
34) –546
35) –597
36) –586
37) –688
38) –635
39) –689
40) –798
41) –734
42) –776
43) –874
44) –808
45) –875
46) –978
47) –929
48) –987
49) –1559
50) –1289
51) –1936
52) –2546
53) –2597
54) –5886
55) –55467
56) –78097
57) –105086
58) –6890785
59) –19096365
60) –67905489
61) –7945889.98
62) –490734.078
63) –77.664059
64) –874.213456
65) –999868.9998
66) –875789.0909

67) –978990.090807
68) –929.34219
69) –908075709
70) –1559.94356
71) –128998.9456
72) –1936.54689069

3. จงแปลงจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปจำนวนปกติ

1) $1\bar{4}$
2) $2\bar{5}$
3) $\bar{1}4$
4) $\bar{2}\bar{5}$
5) $\bar{3}0$
6) $2\bar{3}$
7) $14\bar{3}$
8) $10\bar{3}$
9) $1\bar{1}0$
10) $\bar{1}\bar{2}3$
11) $\bar{1}5\bar{4}$
12) $1\bar{4}\bar{4}$
13) $\bar{2}13$
14) $\bar{2}0\bar{4}$
15) $2\bar{2}\bar{2}$
16) $\bar{2}5\bar{4}$
17) $4\bar{3}2$
18) $\bar{2}0\bar{3}$
19) $3\bar{3}\bar{2}$
20) $\bar{3}0\bar{5}$
21) $3\bar{3}\bar{2}$
22) $3\bar{5}\bar{1}$
23) $3\bar{4}\bar{1}$
24) $\bar{3}1\bar{3}$
25) $4\bar{2}\bar{4}$
26) $4\bar{2}\bar{1}$
27) $4\bar{2}\bar{3}$
28) $\bar{4}40$
29) $4\bar{3}\bar{2}$
30) $\bar{4}2\bar{3}$
31) $\bar{5}5\bar{1}$
32) $5\overline{33}$
33) $1\overline{321}$
34) $\bar{1}45\bar{3}$
35) $\bar{1}51\bar{5}$
36) $\bar{1}410$
37) $\bar{1}401$
38) $1\overline{312}$
39) $\bar{1}453$
40) $11\bar{5}1\bar{1}\bar{4}$
41) $3\bar{4}0\bar{3}1$
42) $1\bar{3}\bar{4}2\bar{1}$
43) $2\bar{4}3\bar{2}$
44) $\overline{\bar{3}454}$
45) $3\bar{2}1\bar{3}$
46) $1\bar{4}\bar{5}\bar{2}$
47) $2\bar{4}3\bar{1}$
48) $\overline{\bar{1}202}$

49) $1\bar{\bar{5}}\overline{54}$

50) $\overline{1\overline{2\bar{4}3}}$

51) $\overline{1\bar{4}3}2$

52) $2\overline{5\bar{4}}3$

53) $\overline{2\bar{5}}2\bar{1}$

54) $1\bar{4}\bar{1}0$

55) $5\bar{5}42\bar{3}$

56) $3\overline{\bar{3}05}4$

57) $\overline{1\overline{0\bar{5}03}1}$

58) $1\bar{3}\bar{2}\bar{1}1\bar{2}\bar{2}5$

59) $2\bar{1}10\bar{4}4\bar{4}5$

60) $1\overline{321}055\overline{11}$

61) $2\bar{1}5\bar{4}\bar{5}\bar{2}2\bar{1}1.\bar{4}\bar{2}3$

62) $1\bar{2}\bar{1}44\bar{1}\bar{1}0.02$

63) $5\bar{1}1\bar{3}34.1\overline{22}$

64) $1\overline{22}.\overline{34}41\overline{41}$

65) $1\overline{13}4.2135\overline{44}$

66) $1000\overline{131}.000\bar{2}$

67) $1\overline{124211}.1\bar{1}1\bar{1}$

68) $10\overline{21}0\bar{1}0.1\bar{1}1\bar{2}1\bar{3}$

69) $1\bar{1}3\bar{1}.3422\bar{1}$

70) $2\overline{44}0.\bar{1}44\overline{44}$

3.6 การดำเนินการบวกของจำนวนวินคิวลัม

การดำเนินการบวกของจำนวนวินคิวลัม เป็นการดำเนินการบวกจำนวนเต็ม เช่น $3+2=5$, $3+(-2)=3+\bar{2}=1, (-3)+2=\bar{3}+2=\bar{1}, (-3)+(-2)=(-5)$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ของ $2\bar{3}4\bar{2}+4\bar{2}\bar{1}3$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 2\;\bar{3}\;4\;\bar{2} \\ 4\;\bar{2}\;\bar{1}\;3 \\ \hline \\ \hline\hline \end{array} + \;\Big\uparrow\; \Rightarrow \begin{array}{r} 2\;\bar{3}\;4\;\bar{2} \\ 4\;\bar{2}\;\bar{1}\;3 \\ \hline 6\;\bar{5}\;3\;1 \\ \hline\hline \end{array} + \; = 5531$$

ขั้นที่ 1 ที่หลักพัน นำ 4 บวกกับ 2 ผลลัพธ์ คือ $2+4=6$

ขั้นที่ 2 ที่หลักร้อย นำ $\bar{2}$ บวกกับ $\bar{3}$ ผลลัพธ์ คือ $\bar{2}+\bar{3}=\bar{5}$

ขั้นที่ 3 ที่หลักสิบ นำ $\bar{1}$ บวกกับ 4 ผลลัพธ์ คือ $\bar{1}+4=3$

ขั้นที่ 4 ที่หลักหน่วย นำ 3 บวกกับ $\bar{2}$ ผลลัพธ์ คือ $3+\bar{2}=1$

ขั้นที่ 5 ใช้วิธีนิขิลัมแปลงผลลัพธ์เป็นจำนวนปกติ $6\bar{5}31=5531$

ตัวอย่างที่ 2

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 3\;\bar{4}\;\bar{4}\;2\;\bar{2} \\ 7\;\bar{5}\;3\;\bar{5}\;4 \\ \hline \\ \hline\hline \end{array} + \;\Big\uparrow\; \Rightarrow \begin{array}{r} 3\;\bar{4}\;\bar{4}\;2\;\bar{2} \\ 1\;\bar{3}\;\bar{5}\;3\;\bar{5}\;4 \\ \hline 1\;0\;\bar{9}\;\bar{1}\;\bar{3}\;2 \\ \hline\hline \end{array} + \; = 9\;0\;8\;7\;2$$

ขั้นตอนการบวกจากซ้ายไปขวา $1+0=1, \bar{3}+3=0, \bar{5}+\bar{4}=\bar{9}, 3+\bar{4}=\bar{1}, \bar{5}+2=\bar{3}$ และ $4+\bar{2}=2$

ดังนั้น ผลลัพธ์ $10\bar{9}\bar{1}\bar{3}2$ ในรูปปกติ คือ 90872 เป็นคำตอบ

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้นการดำเนินการบวกจำนวนวินคิวลัมสองจำนวน ผลบวกเลขโดดแต่ละหลักจะไม่เกินเก้า นั่นคือจะไม่เกิดการทด ในกรณีที่จำนวนที่นำมาหาผลบวกไม่เป็นจำนวนวินคิวลัมจะเกิดการทด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลัพธ์ของ $3\bar{2}54+256\bar{3}$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 3\,\bar{2}\,5\,4 \\ 2\,5\,6\,\bar{3} \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}+ \;\Big\uparrow\; \Rightarrow \begin{array}{r} 3\,\bar{2}\,5\,4 \\ 2\,5\,6\,\bar{3} \\ \hline 1 \\ \hline\hline \end{array}+ \;\Rightarrow\; \begin{array}{r} 3\,\bar{2}\,\dot{5}\,4 \\ 2\,5\,6\,\bar{3} \\ \hline 1\,1 \\ \hline\hline \end{array}+ \;\Rightarrow\; \begin{array}{r} 3\,\bar{2}\,\dot{5}\,4 \\ 2\,5\,6\,\bar{3} \\ \hline 4\,1\,1 \\ \hline\hline \end{array}+ \;\Rightarrow\; \begin{array}{r} 3\,\bar{2}\,\dot{5}\,4 \\ 2\,5\,6\,\bar{3} \\ \hline 5\,4\,1\,1 \\ \hline\hline \end{array}+$$

ขั้นที่ 1 หลักหน่วย นำ $\bar{3}$ บวกกับ 4 ผลลัพธ์คือ $\bar{3}+4=1$ ใส่คำตอบ 1

ขั้นที่ 2 หลักสิบนำ 6 บวกกับ 5 ผลลัพธ์คือ $6+5=11$ เราจะกล่าวว่า ‘Shudha’ ทด 1 โดยใส่จุดบนเลข 5 เป็น $\dot{5}$ แล้วใส่ผลลัพธ์ 1 เป็นคำตอบ

ขั้นที่ 3 หลักร้อย นำจุด (1) บวกกับ 5 บวกกับ $\bar{2}$ ผลลัพธ์คือ $1+5+\bar{2}=4$

ขั้นที่ 4 หลักพัน นำ 2 บวกกับ 3 ผลลัพธ์คือ $2+3=5$

ดังนั้น 5411 เป็นคำตอบ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ของ $5\bar{4}\bar{5}\bar{4}32+3\bar{5}\bar{4}\bar{6}2\bar{4}$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 5\;\bar{4}\;\bar{5}\;\bar{4}\;3\;2 \\ 3\;\bar{5}\;\bar{4}\;\bar{6}\;2\;\bar{4} \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}+ \;\Big\uparrow\; \Rightarrow \begin{array}{r} 5\;\dot{\bar{4}}\;\dot{\bar{5}}\;\dot{\bar{4}}\;3\;2 \\ 3\;\bar{5}\;\bar{4}\;\bar{6}\;2\;\bar{4} \\ \hline 7\;0\;0\;0\;5\;\bar{2} \\ \hline\hline \end{array}+ \;=\; 700048$$

ขั้นที่ 1 หลักหน่วย $\bar{4}+2=\bar{2}$ ใส่คำตอบ $\bar{2}$

ขั้นที่ 2 หลักสิบ $2+3=5$ ใส่คำตอบ 5

ขั้นที่ 3 หลักร้อย $\bar{6}+\bar{4}=\overline{10}$ (Shudha) ใส่คำตอบ 0 ทด $\bar{1}$ (ใส่จุด)

ขั้นที่ 4 หลักพัน $\bar{1}+\bar{4}+\bar{5}=\overline{10}=\bar{1}0$ (Shudha) ใส่คำตอบ 0

ขั้นที่ 5 หลักหมื่น $\bar{1}+\bar{5}+\bar{4}=\overline{10}$ (Shudha) ใส่คำตอบ 0

ขั้นที่ 6 หลักแสน $\bar{1}+3+5=7$ ใส่คำตอบ 7

ดังนั้นผลลัพธ์ $70005\bar{2}$ ในรูปปกติ คือ 700048 เป็นคำตอบ

3.7 การดำเนินการลบของจำนวนวินคิวลัม

การดำเนินการลบของจำนวนวินคิวลัม เป็นการดำเนินการลบจำนวนเต็ม นั่นเอง เช่น $3-2=3+(-2)=3+\bar{2}=1$, $(-3)-2=(-3)+(-2)=\bar{3}+\bar{2}=\bar{5}$ และ $(-3)-(-2)=(-3)+2=\bar{3}+2=\bar{1}$

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาการลบของจำนวนต่อไปนี้

1) $4-3=1$
2) $3-4=-1=\bar{1}$
3) $4-\bar{2}=4-(-2)=4+2=6$
4) $\bar{3}-2=-3-2=-5=\bar{5}$
5) $\bar{2}-\bar{3}=-2-(-3)=-2+3=1$
6) $\bar{4}-\bar{2}=-4-(-2)=-2=\bar{2}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ของจำนวนวินคิวลัม $5\bar{4}2\bar{3}1-2\bar{2}3\bar{4}3$

วิธีทำ

$$\begin{array}{ccccc} 5 & \bar{4} & 2 & \bar{3} & 1 \\ \underline{2} & \underline{\bar{2}} & \underline{3} & \underline{\bar{4}} & \underline{3} \\ \hline\hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 5 & \bar{4} & 2 & \bar{3} & 1 \\ 2 & \bar{2} & 3 & \bar{4} & 3 \\ \hline 3 & \bar{2} & \bar{1} & 1 & \bar{2} \\ \hline\hline \end{array} =27908$$

ขั้นที่ 1 หลักหมื่น 5 ลบด้วย 2 ผลลัพธ์คือ $5-2=3$
ขั้นที่ 2 หลักพัน $\bar{4}$ ลบด้วย $\bar{2}$ ผลลัพธ์คือ $\bar{4}-\bar{2}=\bar{2}$
ขั้นที่ 3 หลักร้อย 2 ลบด้วย 3 ผลลัพธ์คือ $2-3=\bar{1}$
ขั้นที่ 4 หลักสิบ $\bar{3}$ ลบด้วย $\bar{4}$ ผลลัพธ์คือ $\bar{3}-\bar{4}=1$
ขั้นที่ 5 หลักหน่วย 1 ลบด้วย 3 ผลลัพธ์คือ $1-3=\bar{2}$
ดังนั้น ผลลัพธ์ $3\bar{2}\bar{1}1\bar{2}$ ในรูปปกติ คือ 27908

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลัพธ์ของ $371082-1564\bar{1}\bar{1}$

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 7 & 1 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & \bar{1} & \bar{1} \\ \hline \\ \hline\hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccc} 4 & \bar{3} & 1 & 1 & \bar{2} & 2 \\ 2 & \bar{4} & \bar{4} & 4 & \bar{1} & \bar{1} \\ \hline 2 & 1 & 5 & \bar{3} & \bar{1} & 3 \\ \hline\hline \end{array} = 214693$$

$4-2=2,\ \bar{3}-\bar{4}=1,\ 1-\bar{4}=5,\ 1-4=\bar{3},\ \bar{2}-\bar{1}=\bar{1}$ และ $2-\bar{1}=3$

ดังนั้น ผลลัพธ์ $215\bar{3}\bar{1}3$ ในรูปปกติ คือ 214693 เป็นคำตอบ

จากตัวอย่างข้างต้น การลบจำนวนวินคิวลัมสองจำนวนผลลบของเลขโดดแต่ละหลักจะไม่เกินเก้า นั่นคือไม่เกิดการทด

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ของ $3\bar{5}2\bar{4} - 2516$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 3\ \bar{5}\ 2\ \bar{4}\ \ \\ \underline{2\ 5\ 1\ 6}\ - \\ \\ \hline\hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 3\ \bar{5}\ 2\ \bar{4} \\ 2\ 5\ 2\ \overset{-}{\bar{4}} \\ \\ \hline\hline \end{array} \Rightarrow \uparrow \begin{array}{l} 3\ \dot{\bar{5}}\ 2\ \bar{4}\ + \\ \bar{2}\ \bar{5}\ \bar{2}\ 4 \\ \underline{\underline{0\ 0\ 0\ 0}} = 0 \end{array}$$

ขั้นที่ 1 หลักหน่วย $4 + \bar{4} = 0$ ใส่ 0 เป็นคำตอบ

ขั้นที่ 2 หลักสิบ $2+\bar{2} = 0$ ใส่ 0 เป็นคำตอบ

ขั้นที่ 3 หลักร้อย $\bar{5}+\bar{5}=\overline{10}=\bar{1}0$ แล้วกล่าวว่า ‘Shudha’ ทด $\bar{1}$ โดยใส่จุด $(\bullet)$ บน $\bar{5}$ ใส่ 0 เป็นคำตอบ

ขั้นที่ 4 หลักพัน นำจุด $(\bullet)$ $\left(\bar{1}+\bar{2}+3=0\right)$ ใส่ 0 เป็นคำตอบ

ดังนั้น 0 เป็นคำตอบ

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลลัพธ์ $3\bar{4}\bar{5}\bar{4}4-1546\bar{5}$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 3\ \bar{4}\ \bar{5}\ \bar{4}\ 4 \\ \underline{1\ 5\ 4\ 6\ \overset{-}{\bar{5}}} \\ \\ \hline\hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 3\ \bar{4}\ \bar{5}\ \bar{4}\ 4 \\ \underline{1\ 5\ 5\ \bar{4}\ \overset{-}{\bar{5}}} \\ \\ \hline\hline \end{array} \Rightarrow \uparrow \begin{array}{r} 3\ \dot{\bar{4}}\ \dot{\bar{5}}\ \bar{4}\ 4 \\ +\ \ \ \ \\ \underline{\bar{1}\ \bar{5}\ \bar{5}\ 4\ 5} \\ \underline{\underline{1\ 0\ 0\ 0\ 9}}\ \ \ \ \end{array}$$

ขั้นที่ 1 หลักหน่วย $5+4=9$ ใส่ 9 เป็นคำตอบ

ขั้นที่ 2 หลักสิบ $4+\bar{4}=0$ ใส่ 0 เป็นคำตอบ

ขั้นที่ 3 หลักร้อย $\bar{5}+\bar{5}=\overline{10}=\bar{1}0$ แล้วกล่าวว่า ‘Shudha’ ทด $\bar{1}$ โดยใส่จุด $(\bullet)$ บน $\bar{5}$ ใส่ 0 เป็นคำตอบ

ขั้นที่ 4 หลักพัน นำจุด $(\bullet)$ $\left(\bar{1}+\bar{5}+\bar{4}=\overline{10}=\bar{1}0\right)$ แล้วกล่าวว่า ‘Shudha’ ทด $\bar{1}$ โดยใส่จุด $(\bullet)$ บน $\bar{4}$ ใส่ 0 เป็นคำตอบ

ขั้นที่ 5 หลักหมื่น นำจุด $(\bullet)$ $\left(\bar{1}+\bar{1}+3=1\right)$ใส่ 1 เป็นคำตอบ

ดังนั้น 10009 เป็นคำตอบ

แบบฝึกหัดชุดที่ 5

1. จงแสดงการดำเนินการบวกจำนวนต่อไปนี้ และตอบเป็นจำนวนปกติ

1) $$\begin{array}{r} \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{4}\ 5 \\ 3\ 0\ \bar{1}\ 8\ \bar{1} \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}+$$

2) $$\begin{array}{r} 1\ 3\ \bar{4}\ 5\ \bar{1}\ 2 \\ 3\ \bar{4}\ 5\ \bar{1}\ 2\ \bar{3} \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}+$$

3) $$\begin{array}{r} \bar{1}\ 3\ \bar{2}\ 2\ \bar{3}\ 1\ \bar{4} \\ 4\ \bar{1}\ 3\ \bar{3}\ 4\ \bar{2}\ 1 \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}+$$

2. จงแสดงการดำเนินการลบต่อไปนี้ และตอบเป็นจำนวนปกติ

1) $$\begin{array}{r} 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 6\ \bar{2}\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{5}\ \bar{4}\ \bar{1} \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}-$$

2) $$\begin{array}{r} 2\ \bar{3}\ 5\ 1\ 0\ 1 \\ 4\ \bar{4}\ 1\ \bar{2}\ 1\ 0 \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}-$$

3. จงพิจารณาข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด ถ้าผิดแล้วจงหาผลเฉลยที่ถูกต้อง

1) $$\begin{array}{r} 3\ \bar{7}\ 2 \\ 1\ \bar{3}\ \bar{1} \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline\hline \end{array}+$$

2) $$\begin{array}{r} 3\ 5\ \bar{5} \\ \bar{3}\ \bar{4}\ 4 \\ \hline 0\ 0\ 0 \\ \hline\hline \end{array}+$$

3) $$\begin{array}{r} 2\ 3\ 4 \\ 1\ \bar{3}\ \bar{4} \\ \hline 1\ 0\ 0 \\ \hline\hline \end{array}+$$

4. จงแสดงวิธีดำเนินการลบจำนวนต่อไปนี้ และตอบเป็นรูปอย่างง่าย

1) $30\bar{1}8\bar{1} - \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}5$ 2) $864237\text{-}3\bar{5}\bar{5}\bar{4}\bar{7}$ 3) $6543\text{-}5\bar{4}\bar{6}\bar{3}$

4. เทคนิคการลบแบบเวทคณิต

4.1 การลบแบบทั่วไป (General subtraction)

เป็นการลบตรง หลักต่อหลักกล่าวคือ หลักหน่วยลบหลักหน่วย หลักสิบลบหลักสิบ หลักร้อยลบหลักร้อย หลักพันลบหลักพัน หลักหมื่นลบหลักหมื่น เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ โดยเลขโดดของตัวตั้งจะมากกว่าหรือน้อยกว่าเลขโดดของตัวลบก็ได้ ถ้าเลขโดดของตัวตั้งมากกว่าเลขโดดของตัวลบได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนบวก แต่ถ้าตัวเลขโดดของตัวตั้งน้อยกว่าตัวเลขโดดของตัวลบก็ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนลบ (เขียนเป็นจำนวนที่ติดเครื่องหมายบาร์) ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงดำเนินการลบแบบทั่วไป ของจำนวนต่อไปนี้

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 4\ 4\ 4 \\ 2\ 8\ 6 \\ \hline \underline{\underline{2\ \bar{4}\ \bar{2}}} \end{array}- \quad = 158$$

$$\begin{array}{r} 6\ 7\ 6\ 7 \\ 1\ 9\ 0\ 8 \\ \hline \underline{\underline{5\ \bar{2}\ 6\ \bar{1}}} \end{array}- \quad = 4859$$

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 4\ 5\ 1 \\ 7\ 5\ 6\ 4\ 3 \\ \hline \underline{\underline{\bar{5}\ \bar{2}\ \bar{2}\ 1\ \bar{2}}} \end{array}- \quad = \bar{5}\bar{2}\bar{1}\bar{9}\bar{2} - 52192$$

4.2 การดำเนินการบวกและการลบแบบระคน

การดำเนินการบวกและการลบของจำนวนวินคิวลัมเป็นวิธีดำเนินการที่ง่าย เมื่อได้ฝึกฝนการดำเนินการบวกและการลบจะทำให้เกิดความเชื่อมั่นในการคำนวณ ที่มักจะพบเจอในการทำโจทย์คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และชีวิตประจำวัน ซึ่งทำให้แก้ปัญหาได้ดีและรวดเร็วขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ของ $375-253+245-433+327$

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccl} 3 & 7 & 5 & - \\ 2 & 5 & 3 & + \\ 2 & 4 & 5 & - \\ 4 & 3 & 3 & + \\ 3 & 2 & 7 & \\ \hline & & & \\ \hline\hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccl} 4 & \bar{3} & 5 & + \\ \bar{2} & \bar{5} & \bar{3} & + \\ 2 & 4 & 5 & + \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} & + \\ 3 & 3 & \bar{3} & + \\ \hline 3 & \bar{4} & 1 & = 261 \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนทุกจำนวนให้เป็นวินคิวลัม
ขั้นที่ 2 เปลี่ยนการลบเป็นการบวก
ขั้นที่ 3 ใช้การบวกแบบทั่วไปหลักต่อหลัก
ขั้นที่ 4 แปลงคำตอบให้เป็นจำนวนปกติ

> **ข้อสังเกต** ในทุก ๆ กรณี จำนวนที่ประกอบด้วยเลขโดดที่มากกว่า 5 เราจะต้องเปลี่ยนจำนวนนั้นให้เลขโดดมีค่าไม่เกิน 5 โดยใช้วินคิวลัม จะทำให้คำนวณได้ง่ายขึ้น เพราะได้ลดขนาดของเลขโดด และลดวิธีการใส่จุดบนเลขโดดที่บวกกันแล้วมีค่ามากกว่าสิบ (Shudhikaran)

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ของ $275-334+499-289+534-327$

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccl} 2 & 7 & 5 & - \\ 3 & 3 & 4 & + \\ 4 & 9 & 9 & - \\ 2 & 8 & 9 & + \\ 5 & 3 & 4 & - \\ 3 & 2 & 7 & \\ \hline & & & \\ \hline\hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccl} 3 & \bar{3} & 5 & - \\ 3 & 3 & 4 & + \\ 5 & 0 & \bar{1} & - \\ 3 & \bar{1} & \bar{1} & + \\ 5 & 3 & 4 & - \\ 3 & 3 & \bar{3} & \\ \hline & & & \\ \hline\hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccl} 3 & \bar{3} & 5 & + \\ \bar{3} & \bar{3} & \bar{4} & + \\ 5 & 0 & \bar{1} & + \\ \bar{3} & 1 & 1 & + \\ 5 & 3 & 4 & + \\ \bar{3} & \bar{3} & 3 & \\ \hline 4 & \bar{5} & 8 & = 358 \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1 แปลงจำนวนทุกจำนวนให้เป็นวินคิวลัม
ขั้นที่ 2 เปลี่ยนการลบเป็นการบวก
ขั้นที่ 3 ใช้การบวกแบบทั่วไปหลักต่อหลัก
ขั้นที่ 4 แปลงคำตอบให้เป็นจำนวนปกติ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลัพธ์ของ $434+\bar{1}\bar{5}\bar{4}+\bar{1}\bar{4}\bar{5}+\bar{1}211+\bar{4}\bar{4}\bar{5}+2\bar{4}\bar{4}$

วิธีทำ $434+\bar{1}\bar{5}\bar{4}+\bar{1}\bar{4}\bar{5}+\bar{1}211+\bar{4}\bar{4}\bar{5}+2\bar{4}\bar{4}$

$= \bar{1}1\bar{4}\bar{3}$

$= \bar{9}\bar{4}\bar{3} \quad = -943$

ดังนั้น คำตอบคือ –9 4 3

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ของ $234-176+583+378-289$

วิธีทำ $234-176+583+378-289$

$= 234 - 2\bar{2}\bar{4} + 1\bar{4}\bar{2}3 + 4\bar{2}\bar{2} - 3\bar{1}\bar{1}$

$= 234 + \bar{2}24 + 1\bar{4}\bar{2}3 + 4\bar{2}\bar{2} + \bar{3}11$

$= 1\bar{3}30 \quad = 730$

ดังนั้น คำตอบคือ 730

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลลัพธ์ของ $2893-1477+1809-499-1434+999+4345+1434+2343-1342$

วิธีทำ $2893-1477+1809-499-1434+999+4345+1434+2343-1342$

$=3\bar{1}\bar{1}3-15\bar{2}\bar{3}+2\bar{2}1\bar{1}-50\bar{1}-1434+100\bar{1}+4345+1434+2343-1342$

$=3\bar{1}\bar{1}3+\bar{1}\bar{5}23+2\bar{2}1\bar{1}+\bar{5}01+\bar{1}\bar{4}\bar{3}\bar{4}+100\bar{1}+4345+1434+2343+\bar{1}\bar{3}\bar{4}\bar{2}$

$= 1\ \bar{1}\ 0\ 1$

$\quad\ 0\ 0\ 6\ 1$

$= 1\ \bar{1}\ 0\ 7\ 1 \ = 9\ 0\ 7\ 1$

ดังนั้น คำตอบคือ 9 0 7 1

แบบฝึกหัดชุดที่ 6

1. จงดำเนินการลบของสองจำนวนต่อไปนี้โดยใช้**วิธีการลบแบบทั่วไป**

1) $\begin{array}{r} 124 \\ \underline{76} \end{array} -$ 2) $\begin{array}{r} 311 \\ \underline{47} \end{array} -$ 3) $\begin{array}{r} 1356 \\ \underline{638} \end{array} -$ 4) $\begin{array}{r} 462 \\ \underline{327} \end{array} -$

5) $\begin{array}{r} 1101 \\ \underline{757} \end{array} -$ 6) $\begin{array}{r} 932 \\ \underline{846} \end{array} -$ 7) $\begin{array}{r} 1131 \\ \underline{998} \end{array} -$ 8) $\begin{array}{r} 2510 \\ \underline{889} \end{array} -$

9) $\begin{array}{r} 9667 \\ \underline{6387} \end{array} -$ 10) $\begin{array}{r} 12346 \\ \underline{3377} \end{array} -$ 11) $\begin{array}{r} 13157 \\ \underline{456} \end{array} -$ 12) $\begin{array}{r} 25957 \\ \underline{275} \end{array} -$

13) 5 5 3 4 6 –
3 5 8 6

14) 9 9 7 9 2 –
7 9 2 8

15) 9 8 6 7 8 –
8 4 5 7 6

16) 1 2 1 4 8 0 –
9 4 9 9 8

17) 2 0 0 –
2 7 6

18) 2 0 0 –
3 4 7

19) 3 0 0 0 –
5 6 3 8

20) 3 0 0 0 –
4 3 2 7

21) 4 0 0 0 –
7 7 5 7

22) 5 0 0 0 –
9 8 4 6

23) 2 0 0 0 –
5 9 9 8

24) 6 0 0 0 –
7 8 8 9

25) 7 0 0 0 0 –
8 6 3 9 9

26) 5 0 0 0 0 –
7 3 3 7 7

27) 7 4 6 8 4 –
4 6 4 5 6

28) 9 3 0 0 0 –
2 7 5 4 5

29) 2 1 2 1 5 5 –
3 5 8 6 4 8

30) 5 1 6 7 1 2 –
7 9 2 8 4 6

31) 5 1 0 0 0 0 –
8 4 5 7 6 4 1

32) 1 1 4 7 6 7 –
9 4 9 9 8 3 4

33) 2 1 1 5 0 1 –
9 4 3 5 8 6

34) 5 1 1 0 0 0 –
4 7 7 1 8

35) 6 1 5 5 3 1 –
8 8 4 5 7 6

36) 2 1 3 5 4 1 –
9 4 9 9 8 9

37) 2 1 4 5 4 0 –
5 2 4 3 5 8

38) 5 1 5 6 0 0 –
8 6 7 9 2 8

39) 5 1 3 8 8 9 –
8 4 5 7 6 6

40) 1 1 6 7 6 4 –
9 4 9 9 8 7

2. จงหาผลลัพธ์ของจำนวนต่อไปนี้

1) 3 4 5 –
1 6 7 +
2 8 9 +
7 6

2) 1 0 0 –
3 8 9 +
6 5 9 +
9 4 7

3)
$$\begin{array}{rl} 1479 & \\ 1350 & + \\ 6678 & - \\ 3607 & - \\ \underline{4638} & + \\ \hline\hline \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{rl} 2090 & \\ 6357 & - \\ 8571 & + \\ 9025 & + \\ \underline{5327} & - \\ \hline\hline \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{rl} 1680 & \\ 8196 & - \\ 2781 & - \\ \underline{757} & + \\ \hline\hline \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{rl} 4709 & \\ 789 & - \\ 6787 & + \\ \underline{846} & - \\ \hline\hline \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{rl} 44499 & \\ 42587 & + \\ 76901 & - \\ 12587 & + \\ 64593 & - \\ \underline{6387} & + \\ \hline\hline \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{rl} 87016 & \\ 76786 & - \\ 15513 & + \\ 42587 & - \\ 15775 & + \\ \underline{73377} & - \\ \hline\hline \end{array}$$

9) $467878 + 977779 - 233661 + 485858 - 36874 + 767675 + 167928$

= ....

= ....

= ....

10) $987899 - 578888 + 423234 - 67878 - 4851 + 407808 + 436377$

= ....

= ....

= ....

11) $16873589 - 57163985 + 9768456$

= ....

= ....

= ....

12) $7808267814 + 26793986 - 457196275$

= ....

= ....

= ....

5. การตรวจผลลัพธ์การดำเนินการวินคิวลัม

กระบวนการวงกลมเก้าจุดที่นำมาประยุกต์ใช้ในการตรวจสอบคำตอบในการดำเนินการบวก จากเรื่องการดำเนินการบวก สามารถใช้ในการตรวจสอบ การลบ การคูณและการหารได้

พบว่าจำนวนปกติที่แปลงเป็นจำนวนวินคิวลัม จะมีผลบวกเลขโดดของจำนวนปกติเท่ากับ ผลบวกเลขโดดของจำนวนวินคิวลัม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$2893 = 3\bar{1}\bar{1}3$ ผลบวกเลขโดดของ 2893 คือ 4 ผลบวกเลขโดดของ $3\bar{1}\bar{1}3$ คือ 4 เท่ากัน

$1809 = 2\bar{2}1\bar{1}$ ผลบวกเลขโดดของ 1809 คือ 0 หรือ 9 ผลบวกเลขโดดของ $2\bar{2}1\bar{1}$ คือ 0 หรือ 9

$999 = 100\bar{1}$ ผลบวกเลขโดดของ 999 คือ 0 หรือ 9 ผลบวกเลขโดดของ $100\bar{1}$ คือ 0 หรือ 9

$-1477 = -15\bar{2}\bar{3} = \bar{1}\bar{5}23$ ผลบวกเลขโดดของ -1477 คือ -1 ผลบวกเลขโดดของ $-15\bar{2}\bar{3}$ คือ -1
และ ผลบวกเลขโดดของ $\bar{1}\bar{5}23$ คือ -1

$-499 = -50\bar{1} = \bar{5}01$ ผลบวกเลขโดดของ -499 คือ -4 ผลบวกเลขโดดของ $-50\bar{1}$ คือ -4
และ ผลบวกเลขโดดของ $\bar{5}01$ คือ -4

5.1 การตรวจสอบคำตอบจากการดำเนินการบวก

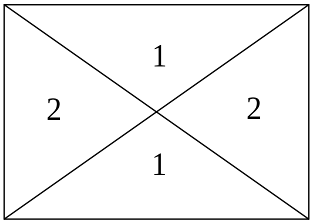
ตัวอย่างที่ 1 จงตรวจสอบคำตอบจากการดำเนินการบวก

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccc} 3 & \bar{2} & 5 & 4 \\ 2 & 5 & \dot{6} & \bar{3} \\ \hline 5 & 4 & 1 & 1 \end{array} + \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array} +$$

$3+\bar{2}+5+4$
(ผลบวกเลขโดดตัวตั้ง)

$5+4+1+1$
(ผลบวกเลขโดดคำตอบ)



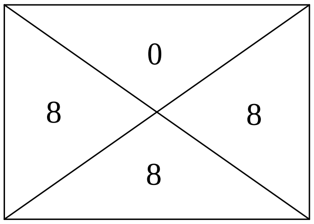
$1+1$
(ผลบวกเลขโดดของตัวตั้งและตัวบวก)

$2+5+6+\bar{3}$
(ผลบวกเลขโดดตัวบวก)

ตัวอย่างที่ 2 จงตรวจสอบคำตอบจากการดำเนินการบวก

วิธีทำ

$$\begin{array}{rl} 4\;\bar{2}\;\dot{\bar{5}}\;3 & \\ \underline{5\;3\;\bar{5}\;\bar{4}} & + \\ \underline{\underline{9\;0\;\bar{0}\;\bar{1}}} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0 & \\ \underline{8} & + \\ \underline{\underline{8}} & \end{array}$$



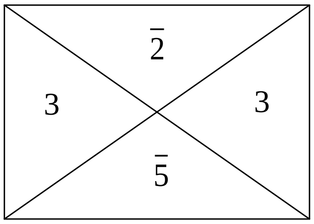
5.2 การตรวจคำตอบจากการดำเนินการลบ

ขั้นตอนการตรวจคำตอบจากการดำเนินการลบกระทำเช่นเดียวกันกับขั้นตอนการตรวจสอบการบวก

ตัวอย่างที่ 1

วิธีทำ

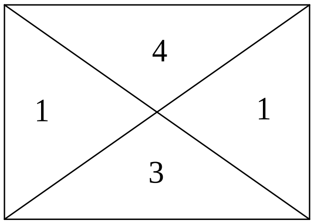
$$\begin{array}{rl} 4\;\bar{5}\;\dot{3}\;3\;\dot{\bar{7}} & - \\ \underline{2\;\bar{5}\;\bar{8}\;\bar{7}\;4} & \\ \underline{\underline{2\;1\;1\;9\;\bar{1}}} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \bar{2} & \\ \underline{\bar{5}} & - \\ \underline{\underline{3}} & \end{array}$$



ตัวอย่างที่ 2

วิธีทำ

$$\begin{array}{rl} 5\;6\;\bar{4}\;\dot{8}\;3\;\bar{5} & - \\ \underline{4\;\bar{2}\;\bar{5}\;\bar{5}\;\bar{2}\;4} & \\ \underline{\underline{1\;8\;2\;3\;5\;\bar{9}}} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 4 & \\ \underline{\bar{6}} & - \\ \underline{\underline{1}} & \end{array}$$



5.3 การตรวจคำตอบจากการดำเนินการบวกลบระคน

ตัวอย่างที่ 1 จงตรวจสอบคำตอบต่อไปนี้

$$\begin{array}{rl} 3\;4\;4 & + \\ \bar{1}\;\bar{6}\;\bar{7} & + \\ \bar{2}\;\bar{5}\;\bar{4} & + \\ 8\;0\;2 & + \\ \bar{2}\;\bar{4}\;\bar{7} & + \\ \underline{\bar{1}\;\bar{3}\;\bar{6}} & \\ \underline{\underline{4\;\bar{5}\;\bar{8}}} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 2 & + \\ \bar{5} & + \\ \bar{2} & + \\ 1 & + \\ \bar{4} & + \\ \underline{\bar{1}} & \\ \underline{\underline{\bar{9}}} & \end{array}$$

พบว่า คำตอบ $4\bar{5}\bar{8} = 348$ และ $4 + \bar{5} + \bar{8} = \bar{9}$

5.4 สมบัติของวงกลมเก้าจุด

จากการศึกษาการตรวจสอบคำตอบของการดำเนินการบวกและการลบ ว่าถูกต้องหรือไม่โดยใช้การหาผลบวกเลขโดดของจำนวนที่นำมาดำเนินการกระทำกันและผลบวกของเลขโดดของคำตอบ เป็นที่สังเกตพบว่า ผลบวกของเลขโดดของจำนวนปกติที่แปลงเป็นจำนวนวินคิวลัมนั้นเท่ากัน

แล้วยังพบสมบัติของวงกลมเก้าจุดอีกว่า ผลบวกเลขโดดของจำนวนนั้นยังเท่ากับตัวเติมเต็มที่เป็นจำนวนตรงข้ามสำหรับการบวกของของจำนวนนั้นในวงกลมเก้าจุด เช่น

ผลบวกเลขโดดของ $910\bar{1}$ คือ $9+1+0+\bar{1}=(9+1)+0+\bar{1}=10+0+\bar{1}=(1+0)+0+\bar{1}=1+\bar{1}=0=\bar{0}$

$9+1+0+\bar{1}=9+0+(1+\bar{1})=9+0+0=9$

สรุป 9 เป็นตัวเติมเต็มของ 0 ในวงกลมเก้าจุด

ผลบวกเลขโดดของ $4\bar{4}\bar{2}=358$ คือ $4+\bar{4}+\bar{2}=\bar{2}$

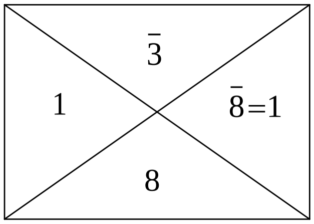
แต่ $3+5+8=(3+5)+8=8+8=16\rightarrow 1+6=7$

ดังนั้น $\bar{2}=7$ (7 และ $\bar{2}$ เป็นตัวเติมเต็มซึ่งกันและกันในวงกลมเก้าจุด)

ตัวอย่างที่ 1

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 5\ \dot{\bar{4}}\ \dot{\bar{5}}\ \dot{\bar{4}}\ 3\ 2 \\ 3\,\bar{5}\ \bar{4}\ \bar{6}\ 2\ \bar{4} \\ \hline 7\ 0\ 0\ 0\ 5\ \bar{2} \\ \hline\hline \end{array} + \qquad \begin{array}{r} \bar{3} \\ \bar{5} \\ \hline 1 \\ \hline\hline \end{array} +$$



ดังนั้น 1 เป็นตัวเติมเต็มของ $\bar{8}$ ในวงกลมเก้าจุด

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ของ $275-334+499-289+534-327$ และตรวจสอบคำตอบการดำเนินการ

วิธีทำ

$$\begin{array}{rl} 3\ \bar{3}\ 5 & + \\ \bar{3}\ \bar{3}\ \bar{4} & + \\ 5\ 0\ \bar{1} & + \\ \bar{3}\ 1\ 1 & + \\ 5\ 3\ 4 & + \\ \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{7} & + \\ \hline 4\ \bar{4}\ \bar{2} & \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 5 & + \\ \bar{1} & + \\ 4 & + \\ \bar{1} & + \\ 3 & + \\ \underline{\bar{7}} & + \\ 7 & \\ \hline\hline \end{array}$$

พบว่า ผลบวกคำตอบ $4+\bar{4}+\bar{2}=\bar{2}=7$ และผลบวกเลขโดดทุกจำนวนที่บวกกัน

$5+\bar{1}+4+\bar{1}+3+\bar{3}=7$

บทนำ

การคูณ เป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง ทำให้เกิดการเพิ่มหรือลดของจำนวนหนึ่ง การคูณเป็นหนึ่งในสี่ของการดำเนินการพื้นฐานของวิชาเลขคณิต (การดำเนินการพื้นฐานในวิชาเลขคณิต ได้แก่ การบวก การลบ การคูณและการหาร)

การคูณสามารถนิยามบนจำนวนธรรมชาติว่าเป็นการบวกที่ซ้ำ ๆ กัน ตัวอย่างเช่น 3 คูณด้วย 4 (หรือเรียกโดยย่อว่า 3 คูณ 4) หมายถึงการบวกจำนวน 4 เข้าไป 3 ชุด

ในบทนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการคูณแบบเวทคณิตมี 7 เรื่อง คือ การดำเนินการแบบทั่วไป การดำเนินการคูณแบบเทคนิค การคูณของจำนวนที่ตัวเลขแรกเท่ากันแต่ตัวเลขตัวหลังบวกกันได้ 10, 100, 1000, . . . การยกกำลังสอง การคูณโดยการเบี่ยงฐาน การคูณด้วยตัวคูณเป็นเลขเก้าหรืออนุกรมของเลขเก้า และการตรวจสอบคำตอบ ซึ่งแต่ละเรื่องมีรายละเอียด ดังนี้

1. เกริ่นนำ
2. การดำเนินการคูณแบบทั่วไป
    - 2.1 การคูณจากทางซ้ายไปทางขวา
    - 2.2 การคูณแนวตั้งและแนวไขว้
    - 2.3 การคูณโดยการเลื่อนตัวคูณ
3. การดำเนินการคูณแบบเทคนิค
    - 3.1 การคูณโดนใช้สัดส่วนช่วยในการคำนวณ
    - 3.2 การคูณด้วยตัวคูณ 4, 8, 16, . . . และ 40, 80, 160, . . .
    - 3.3 การขยายสูตรคูณ
    - 3.4 การคูณด้วยตัวคูณ 5, 50, 250, . . .
    - 3.5 การคูณด้วยตัวคูณ 5, 15, 25, 35, 45, 55, . . .
    - 3.6 กำลังสองของจำนวนที่ลงท้ายด้วย 5
4. การคูณของจำนวนที่ตัวเลขแรกเท่ากัน แต่ตัวเลขตัวหลังบวกกันได้ 10, 100, 1000, . . .
5. การยกกำลังสอง
6. การคูณโดยการเบี่ยงฐาน
    - 6.1 การคูณโดยการเบี่ยงฐาน กรณีตัวคูณทั้งสองน้อยกว่าฐาน
    - 6.2 การคูณโดยการเบี่ยงฐาน กรณีตัวคูณทั้งสองมากกว่าสูง
    - 6.3 การคูณโดยการเบี่ยงฐาน กรณีตัวคูณตัวหนึ่งมากกว่าฐานและตัวหนึ่งน้อยกว่าฐาน
    - 6.4 การนำสมบัติของเรื่องสัดส่วนมาช่วยการคำนวณ
    - 6.5 การคูณแบบนิขิลัมสูตรในกรณีตัวคูณทั้งสองตัวต่างฐานกัน
    - 6.6 การคูณแบบนิขิลัมสูตรในกรณีตัวคูณมีสามตัวพร้อมกัน
    - 6.7 การหาค่ากำลังสองของจำนวนที่มีค่าใกล้เลขฐาน
    - 6.8 การหาค่ากำลังสองของจำนวนที่มีค่าใกล้เคียง 50
7. การคูณด้วยตัวคูณเป็นเลขเก้าหรืออนุกรมของเลขเก้า

8. การตรวจสอบคำตอบด้วยวิธีการคูณตัวแรกด้วยตัวแรก การคูณตัวหลังด้วยตัวหลัง และการหาผลบวกของตัวเลขโดดในคำตอบ

1. เกริ่นนำ

เนื่องจากเวทคณิต เน้นการคิดเลขจากซ้ายไปขวา ดังนั้น สูตรที 3 ของเวทคณิตคือ แนวตรงและแนนไขว้ (Urdhva-Tiryagbyham Meaning : Vertically and crosswise) จึงเป็นสูตรที่นำมาใช้ในการดำเนินการคูณเลขสองจำนวนได้อย่างมีประสิทธิภาพ และรวดเร็วมาก ซึ่งจะได้เรียนรู้ ดังต่อไปนี้ :

2. การดำเนินการคูณแบบทั่วไป

เป็นการดำเนินการคูณขั้นพื้นฐาน

2.1การดำเนินการคูณจากทางซ้ายไปทางขวา (CALCULATION FROM LEFT TO RIGHT)

สมบัติของจำนวนหลักของผลคูณ

จำนวนหลักของผลคูณจะเป็นดังนี้ n คือจำนวนหลักของตัวตั้ง และ m คือจำนวนหลักของตัวคูณ ผลลัพธ์ของการคูณจำนวน n หลัก กับจำนวน m หลัก จะได้ผลลัพธ์ที่มีหลักไม่เกิน n + m หลัก

เรามาลองดูวิธีหาผลคูณจากทางซ้ายไปทางขวาดังนี้

ถ้าต้องการหาผลคูณ 234 ด้วย 2

$$\begin{array}{lll} 2 & 4 & 3 \\ \underline{2} & & \\ \underline{\underline{4}} & \underline{\underline{8}} & \underline{\underline{6}} \end{array} \times \qquad \text{หรือ} \qquad \begin{array}{rrr} 2 & 4 & 3 \\ & & \underline{2} \\ \underline{\underline{4}} & \underline{\underline{8}} & \underline{\underline{6}} \end{array} \times$$

ขั้นตอนการคูณจากทางซ้ายไปทางขวาจะได้ $2 \times 2 = 4$, $4 \times 2 = 8$, $3 \times 2 = 6$

นั่นคือ ใส่ 4 ในหลักร้อย 8 ในหลักสิบ และ 6 ในหลักหน่วย ตามลำดับ

ข้อสังเกต การคูณเลขในแต่ละหลักด้วย 2 ได้ค่าสูงสุดไม่เกิน 9 ก็คือไม่มีตัวทดจึงง่าย

ตัวอย่างที่ 1

วิธีทำ

$$\begin{array}{rrr} & 8 & 7 \\ & & \underline{4} \\ 3 & \underset{2}{2} & 8 \\ \hline \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{4}} & \underline{\underline{8}} \end{array} \times$$

ขั้นที่ 1 คูณ 8 ด้วย 4 ผลลัพธ์คือ 32 เขียน 3 ห้อย 2

ขั้นที่ 2 หา $7 \times 4 = 28$ เขียน 2 และ 8

ขั้นที่ 3 ผลลัพธ์ที่ได้คือ 348

ตัวอย่างที่ 2

วิธีทำ

$$\begin{array}{rrrrrrl} & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & \\ & & & & & 3 & \times \\ \hline 2 & \underset{4}{2} & \underset{1}{1} & \underset{8}{0} & \underset{3}{1} & 2 & \\ \hline 2 & 6 & 2 & 8 & 4 & 2 & \\ \hline\hline \end{array}$$

➡

ขั้นที่ 1 คูณจากทางซ้าย 8 ด้วย 3 ผลลัพธ์คือเขียน 2 ห้อย 4

ขั้นที่ 2 $7 \times 3 = 21$ เขียน 2 ห้อย 1

ขั้นที่ 3 $6 \times 3 = 18$ เขียน 1 ห้อย 8

ขั้นที่ 4 $1 \times 3 = 03$ เขียน 0 ห้อย 3

ขั้นที่ 5 $4 \times 3 = 12$ เขียน 1 และ 2

ขั้นที่ 6 ผลลัพธ์ที่ได้คือ 262,842

วิธีการเขียนการคำนวณจากทางซ้ายไปทางขวา (WRITING LEFT TO RIGHT CALCULATION)

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณ 236×7

คูณจากทางซ้ายไปทางขวาของ

$$\begin{array}{rrrrl} & 2 & 3 & 6 & \\ & & & 7 & \times \\ \hline 1 & \underset{4}{2} & \underset{1}{4} & 2 & \\ \hline 1 & 6 & 5 & 2 & \\ \hline\hline \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ (1) 3457×8

(2) 138×4

(3) 234×3

วิธีทำ เขียนตามแนวนอน (1) $3457 \times 8 = 2\,\underset{4}{3}\,\underset{2}{4}\,\underset{0}{5}6 = 27{,}656$

(2) $138 \times 4 = 0\,\underset{4}{1}\,\underset{2}{3}\,2 = 552$

(3) $234 \times 3 = 0\,\underset{6}{0}\,\underset{9}{1}\,2 = 702$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 การดำเนินการคูณจากซ้ายไปขวา

1. $\begin{array}{rrl} 3 & 2 & \\ & 3 & \times \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

2. $\begin{array}{rrrrl} 3 & 1 & 3 & 4 & \\ & & & 2 & \times \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

3. $\begin{array}{rrrrl} 5 & 3 & 2 & 1 & \\ & & & 3 & \times \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

4. $\begin{array}{rrrrl} 6 & 8 & 2 & 1 & \\ & & & 4 & \times \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

5. $\begin{array}{rrrl} 2 & 3 & 6 & \\ & & 7 & \times \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

6. $\begin{array}{rrrrl} 5 & 7 & 3 & 2 & \\ & & & 6 & \times \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

7. $\begin{array}{rrrrl} 5 & 7 & 4 & 4 & \\ & & & 8 & \times \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

8. $\begin{array}{rrrrl} 7 & 8 & 5 & 7 & \\ & & & 9 & \times \\ \hline \\ \hline\hline \end{array}$

9. 4 8 4 3 5 ×	10. 5 8 4 4 8 ×	11. 4 8 9 6 4 ×	12. 5 9 4 9 7 ×
13. 9 4 3 7 2 6 ×	14. 3 8 4 6 9 5 ×	15. 5 2 6 4 8 7 ×	16. 6 8 2 1 5 9 ×
17. 3 2 1 4 6 3 4 ×	18. 9 7 1 4 6 6 7 ×	19. 9 7 8 4 6 3 9 ×	20. 6 8 2 1 9 9 5 ×
21. 6 7 7 4 4 6 8 ×	22. 8 4 6 9 6 4 3 ×	23. 8 4 6 9 6 4 5 ×	24. 6 8 2 8 4 6 8 ×
25. 9 4 4 7 8 6 8 ×	26. 4 7 9 9 4 6 3 ×	27. 9 6 4 8 4 6 5 ×	28. 2 8 4 6 6 8 8 ×
29. 4 4 6 6 7 7 8 ×	30. 8 9 6 4 4 6 3 ×	31. 5 4 8 6 6 6 5 ×	32. 8 8 9 9 8 7 8 ×
33. 7 7 7 7 7 7 7 ×	34. 8 8 8 8 8 8 8 ×	35. 6 6 6 6 6 6 6 ×	36. 9 9 9 9 9 9 9 9 ×

37. $\begin{array}{r} 9714633 \\ \underline{3} \ \times \end{array}$

38 $\begin{array}{r} 59784633 \\ \underline{8} \ \times \end{array}$

39. $\begin{array}{r} 69696969 \\ \underline{6} \times \end{array}$

40. $\begin{array}{r} 96667796 \\ \underline{9} \times \end{array}$

41. $\begin{array}{r} 8469.647 \\ \underline{8} \ \times \end{array}$

42. $\begin{array}{r} 8483.88 \\ \underline{0.7} \ \times \end{array}$

43. $\begin{array}{r} 279.676 \\ \underline{0.6} \times \end{array}$

44. $\begin{array}{r} 989.7979 \\ \underline{0.9} \ \times \end{array}$

2.2 การคูณแนวตั้งและแนวไขว้ (Vertically and Cross-wise)

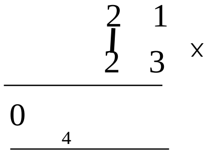
เป็นสูตรที่ 3 การคูณแนวตั้งและแนวไขว้ ซึ่งแบบรูปทั่วไป (General Multiplication) ของจำนวนสองจำนวนโดยการดำเนินการคูณแนวตั้งและแนวไขว้ เป็นวิธีที่สั้นสามารถคูณกันได้ รวดเร็วและพัฒนาเพื่อการคูณจากทางซ้ายไปทางขวา ซึ่งการคูณแบบนี้มีประสิทธิภาพมาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

2.2.1 การคูณจำนวนสองหลักกับจำนวนสองหลัก

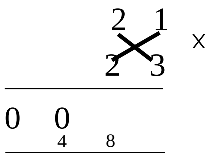
ผังการคูณแนวตั้งและแนวไขว้ ของจำนวนสองหลักกับจำนวนสองหลัก

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 21×23

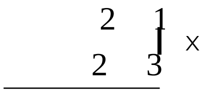
วิธีทำ



ขั้นที่ 1 หาผลคูณตามแนวตั้งของหลักสิบ จะได้ $2 \times 2 = 04$ เขียน 0 ห้อย 4



ขั้นที่ 2 หาผลบวกของผลคูณไขว้หลักสิบกับหลักหน่วยจะได้ $(2 \times 3) + (1 \times 2) = 08$ เขียน 0 ห้อย 8



ขั้นที่ 3 หาผลคูณตามแนวตั้งของหลักหน่วย จะได้ $1 \times 3 = 03$ เขียน 0 และ 3

$$\begin{array}{cccc} 0 & \underset{4}{0} & \underset{8}{0} & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & 1 & \\ & & 2 & 3 & \times \\ \hline 0 & \underset{4}{0} & \underset{8}{0} & 3 & \\ \hline 0 & 4 & 8 & 3 & \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4 นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกัน มาบวกกันจากทางซ้ายไปทางขวา ได้ผลลัพธ์คือ 483

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 89×65

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 9 & \\ & | & & \\ & 6 & 5 & \times \\ \hline 4_{8} & & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1 หาผลคูณตามแนวตั้งของหลักสิบ จะได้ $8\times6=48$ เขียน 4 ห้อย 8

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 9 & \\ & & \times & \\ & 6 & 5 & \times \\ \hline \underset{8}{4} & \underset{4}{9} & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2 หาผลบวกของผลคูณไขว้หลักสิบกับหลักหน่วย จะได้ $(8\times5)+(9\times6)=94$ เขียน 9 ห้อย 4

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & 9 & \\ & & & | & \\ & & 6 & 5 & \times \\ \hline 4 & \underset{8}{9} & \underset{4}{4} & 5 & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3 หาผลคูณตามแนวตั้งของหลักหน่วย จะได้ $9\times5=45$ เขียน 4 และ 5

$$\begin{array}{ccccc} & & 8 & 9 & \\ & & 6 & 5 & \times \\ \hline 4 & \underset{8}{9} & \underset{4}{4} & 5 & \\ \hline 5 & 7 & 8 & 5 & \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4 นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกัน มาบวกกันจากทางซ้ายไปทางขวา ได้ผลลัพธ์คือ 5,785

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 43×32

วิธีทำ

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 3 & \\ & & 3 & 2 & \times \\ \hline 1 & \underset{2}{1} & \underset{7}{0} & 6 & \\ \hline 1 & 3 & 7 & 6 & \\ \hline\hline \end{array}$$

การดำเนินการคูณ

1) $4\times3=12$ เขียน 1 ห้อย 2

2) $(4\times2)+(3\times3)=17$ เขียน 1 ห้อย 7

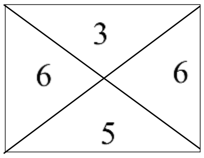
3) $3\times2=06$ เขียน 0 และ 6

4) นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกัน มาบวกกันจากทางซ้ายไปทางขวา ได้ผลลัพธ์คือ 1,376

วิธีการตรวจสอบคำตอบของการดำเนินการคูณจำนวนสองจำนวน ด้วยวิธีผลบวกเลขโดด

จากตัวอย่างที่ 1

$$\begin{array}{r} 21 \\ \underline{23} \\ \underline{\underline{483}} \end{array} \times$$



$3 \times 5 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6$

ขั้นที่ 1 เขียนตารางและลากเส้นทแยงมุมเกิดสามเหลี่ยม 4 รูป ดังรูปข้างต้น

ขั้นที่ 2 หาผลบวกเลขโดดของตัวตั้ง 21 คือ $2+1=3$ นำ 3 ไปเขียนไว้ที่สามเหลี่ยมด้านบน

ขั้นที่ 3 หาผลบวกเลขโดดของตัวคูณ 23 คือ $2+3=5$ นำ 5 ไปเขียนไว้ที่สามเหลี่ยมด้านล่าง

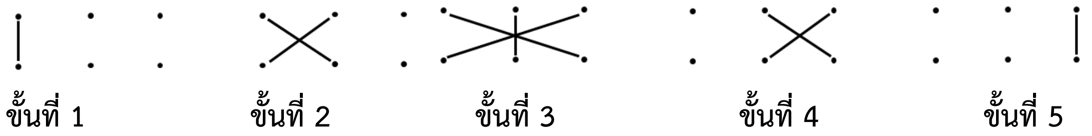
ขั้นที่ 4 หาผลคูณของตัวเลขสามเหลี่ยมบนกับสามเหลี่ยมล่าง $3 \times 5 = 15$ หาบวกเลขโดดของผลคูณ คือ $1+5=6$ นำ 6 ไปเขียนไว้ที่สามเหลี่ยมด้านข้างทางขวามือ

ขั้นที่ 5 หาผลบวกเลขโดดของผลลัพธ์การคูณ $21 \times 23 = 483$ คือ $483 \rightarrow 4+8+3=15 \rightarrow 1+5=6$

นำ ไปเขียนไว้ที่สามเหลี่ยมด้านข้างทางซ้ายมือ ถ้าตัวเลขของสามเหลี่ยมด้านข้างซ้ายและขวาเท่ากัน แสดงว่าผลคูณนั้นถูกต้อง

2.2.2 การคูณจำนวนสองจำนวนที่เป็นจำนวนเท่ากันตั้งแต่สามหลักขึ้นไป

แผนภาพการคูณแนวตั้งและแนวไขว้ ของจำนวนสามหลักกับจำนวนสามหลัก



ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 304×412

วิธีทำ แยกตัวตั้งและตัวคูณออกเป็น 3 หลัก

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 0 & 4 \\ & \underline{4} & \underline{1} & \underline{2} \\ \underline{1_2} & & & \end{array} \times$$

ขั้นที่ 1

1. หาผลคูณตามแนวตั้งที่หลักร้อยจะได้ $3 \times 4 = 12$
2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีหนึ่งหลักคูณกับจำนวนที่มีหนึ่งหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $1+1=2$ หลัก
3. เขียน 12 ที่หลักร้อยในรูปแบบ 1_2

$$\begin{array}{r} 3\ \ 0\ \ 4 \\ \underline{4\ \ 1\ \ 2}\ \times \\ \underline{1\ 0_{2}\ _{3}\quad} \end{array}$$

ขั้นที่ 2

1. หาผลบวกของผลคูณไขว้ที่หลักร้อยกับหลักสิบได้

$(3)(1) + (4)(0) = 03$

2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีหนึ่งหลักคูณกับจำนวนที่มีหนึ่งหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $1+1 = 2$ หลัก
3. เขียน 03 ต่อจากขั้นที่ 1 เป็น $1\ \ 0_{2}\ \ _{3}$

$$\begin{array}{r} 3\ \ 0\ \ 4 \\ \underline{4\ \ 1\ \ 2}\ \times \\ \underline{1\ 0_{2}\ 2_{3}\ _{2}\quad} \end{array}$$

ขั้นที่ 3

1. หาผลบวกของผลคูณไขว้และผลคูณตามแนวตั้งทั้งสามหลักได้

$[(3)(2) + (4)(4) = 22] + [(0) \times (1) = 0] = 22$

2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีหนึ่งหลักคูณกับจำนวนที่มีหนึ่งหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $1+1= 2$ หลัก
3. เขียน 22 ต่อจากขั้นที่ 2 เป็น $1\ \ 0_{2}\ \ 2_{3}\ \ _{2}$

$$\begin{array}{r} 3\ \ 0\ \ 4 \\ \underline{4\ \ 1\ \ 2}\ \times \\ \underline{1\ 0_{2}\ 2_{3}\ 0_{2}\ _{4}\quad} \end{array}$$

ขั้นที่ 4

1. หาผลบวกของผลคูณไขว้หลักสิบกับหลักหน่วยได้

$(0)(2) + (4)(1) = 04$

2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีหนึ่งหลักคูณกับจำนวนที่มีหนึ่งหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $1+1 = 2$ หลัก
3. เขียน 04 ต่อจากขั้นที่ 3 เป็น $1\ \ 0_{2}\ \ 2_{3}\ \ 0_{2}\ \ _{4}$

$$\begin{array}{r} 3\ \ 0\ \ 4 \\ \underline{4\ \ 1\ \ 2}\ \times \\ \underline{1\ 0_{2}\ 2_{3}\ 0_{2}\ 0_{4}\ 8} \end{array}$$

ขั้นที่ 5

1. หาผลคูณตามแนวตั้งที่หลักหน่วยได้ $2 \times 4 = 08$
2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีหนึ่งหลักคูณกับจำนวนที่มีหนึ่งหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $1+1 = 2$ หลัก
3. เขียน 08 ที่หลักหน่วย เป็น $1\ 0_{2}\ 2_{3}\ 0_{2}\ 0_{4}\ 8$

$$\begin{array}{r} 3\ \ 0\ \ 4 \\ \underline{4\ \ 1\ \ 2} \times \\ \underline{1\ 0_2\ 2_3\ 0_2\ 0_4\ 8} \\ \\ \underline{\underline{1\ 2\ 5\ 2\ 4\ 8}} \end{array}$$

ขั้นที่ 6

นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกันมาบวกกันจากซ้ายไปขวา จะได้ผลลัพธ์ คือ 125248

ดังนั้น $304 \times 412 = 125,248$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 123×132

วิธีทำ เราสามารถใช้วิธีที่การคูณจำนวนสองหลักกับจำนวนสองหลัก โดยการแยกแต่ละจำนวนออกเป็น 2 ส่วน คือ 12 / 3 และ 13 / 2 แล้วทำให้ 12 กับ 13 ดูเหมือนเป็นตัวเลขตัวเดียว ดังนี้

$$\begin{array}{r} 1\ \ 2\ \ \ \ 3 \\ \underline{1\ \ 3\ \ \ \ 2} \times \\ \underline{0\ 1\ \ {}_5\ \ {}_6\ \ \ } \end{array}$$

ขั้นที่ 1

1. หาผลคูณตามแนวตั้งจะได้ $12 \times 13 = 156$
2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีสองหลักคูณกับจำนวนที่มีสองหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $2+2=4$ หลัก
3. เขียน 156 ให้มีสี่หลักและมีตัวห้อยสองหลักตรงกับส่วนแรกได้คือ $0\ \ 1\ \ {}_5\ \ {}_6$

$$\begin{array}{r} 1\ \ 2\ \ \ \ 3 \\ \underline{1\ \ 3\ \ \ \ 2} \times \\ \underline{0\ 1\ 0_5\ \ 6_6\ \ {}_3\ } \end{array}$$

ขั้นที่ 2

1. หาผลบวกของผลคูณไขว้จะได้ $(12)(2) + (13)(3) = 63$
2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีสองหลักคูณกับจำนวนที่มีหนึ่งหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $2+1=3$ หลัก
3. เขียน 063 ให้มีสามหลักและมีตัวห้อยหนึ่งหลักตรงกับส่วนที่สองได้คือ $0\ \ 6\ \ {}_3$

$$\begin{array}{r} 1\ \ 2\ \ \ \ 3 \\ \underline{1\ \ 3\ \ \ \ 2} \times \\ \underline{0\ 1\ 0_5\ \ 6_6\ \ 0_3\ \ 6} \end{array}$$

ขั้นที่ 3

1. หาผลคูณตามแนวตั้งจะได้ $3 \times 2 = 6$
2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีหนึ่งหลักคูณกับจำนวนที่มีหนึ่งหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $1+1=2$ หลัก
3. เขียน 6 ให้มีสองหลักเป็นตัวปิดได้คือ 0 6

$$\begin{array}{r} 1\;\;2\;\;\;\;3\;\; \\ 1\;\;3\;\;\;\;2\;\;\times \\ \hline 0\;1\;0_{5}\;\;6_{6}\;\;0_{3}\;\;6\;\; \\ \hline 0\;1\;6\;\;2\;\;3\;\;6\;\; \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4

นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกันมาบวกกันจากซ้ายไปขวา จะได้ผลลัพธ์ คือ 16236

ดังนั้น $123 \times 132 = 16,236$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 613×158

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 6\;\;1\;\;3\;\; \\ 1\;\;5\;\;8\;\;\times \\ \hline 0\;{}_{6}\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1 หาผลคูณตามแนวตั้งของหลักร้อย

จะได้ $6 \times 1 = 01$ เขียน 0 ห้อย 6

$$\begin{array}{r} 6\;\;1\;\;3\;\; \\ 1\;\;5\;\;8\;\;\times \\ \hline 0\;3_{6}\;{}_{1}\;\;\;\;\;\; \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2 หาผลบวกของผลคูณไขว้หลักร้อยกับหลักสิบ จะได้ $(6\times5)+(1\times1)=31$ เขียน 3 ห้อย 1

$$\begin{array}{r} 6\;\;1\;\;3\;\; \\ 1\;\;5\;\;8\;\;\times \\ \hline 0\;3_{6}\;5_{1}\;{}_{6}\;\;\;\; \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3 หาผลบวกของผลคูณไขว้หลักร้อยกับหลักหน่วยและผลคูณแนวตั้งหลักสิบ จะได้ $(6\times8)+(3\times1)+(1\times5)=56$ เขียน 5 ห้อย 6

$$\begin{array}{r} 6\;\;1\;\;3\;\; \\ 1\;\;5\;\;8\;\;\times \\ \hline 0\;3_{6}\;5_{1}\;2_{6}\;{}_{3} \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4 หาผลบวกของผลคูณไขว้หลักสิบกับหลักหน่วย จะได้ $(1\times8)+(3\times5)=23$ เขียน 2 ห้อย 3

$$\begin{array}{r} 6\;\;1\;\;3\;\; \\ 1\;\;5\;\;8\;\;\times \\ \hline 0\;3_{6}\;5_{1}\;2_{6}\;2_{3}\;4 \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 5 หาผลคูณตามแนวตั้งหลักหน่วย

จะได้ $(3\times8)=24$ เขียน 2 และ 4

$$\begin{array}{r}
6\;\;1\;\;3 \\
1\;\;5\;\;8 \quad \times \\
\hline
0\;3_6\;5_1\;2_6\;2_3\;4 \\
\hline
9\,6\,8\,5\,4 \\
\hline\hline
\end{array}$$

ขั้นที่ 6 นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกัน มาบวกกันจากซ้ายไปขวาจะได้ผลลัพธ์ คือ 96,854

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ 865×432

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
8\;\;6\;\;5 \\
4\;\;3\;\;2 \quad \times \\
\hline
3\;4_2\;5_8\;2_4\;1_7\;0 \\
\hline
3\,7\,3\;6\,8\,0 \\
\hline\hline
\end{array}$$

ขั้น การคูณ

1) $8 \times 4 = 32$ เขียน 3 ห้อย 2

2) $(8\times3)+(6\times4)=48$ เขียน 4 ห้อย 8

3) $(8\times2)+(5\times4)+(6\times3)=54$ เขียน 5 ห้อย 4

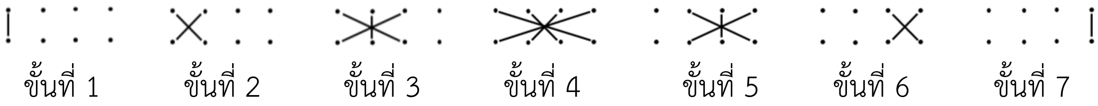
4) $(6\times2)+(5\times3)=27$ เขียน 2 ห้อย 7

5) $5\times2=10$ เขียน 1 และ 0

6) นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกัน มาบวกกันจากทางซ้ายไปทางขวา ได้ผลลัพธ์คือ 373,680

ข้อสังเกต

ขั้นตอนที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปเป็นแผนภาพได้ กรณีการคูณจำนวนสี่หลักกับจำนวนสี่หลัก



ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของ 1201×1312

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
1\;\;2\;\;0\;\;1 \\
1\;\;3\;\;1\;\;2 \quad \times \\
\hline
0_1 \qquad\qquad \\
\hline
\end{array}$$

ขั้นที่ 1

1. หาผลคูณตามแนวตั้งหลักพันได้ $1 \times 1 = 1$
2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีหนึ่งหลักคูณกับจำนวนที่มีหนึ่งหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $1+1=2$ หลัก
3. เขียน 1 ที่หลักพันเป็น 0_1

$$\begin{array}{r} 1\;\;2\;\;0\;\;1 \\ 1\;\;3\;\;1\;\;2\;\times \\ \hline 0\;0_1\;{}_5 \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2

1. หาผลบวกของผลคูณไขว้หลักหลักพันกับหลักร้อยได้

$(1)(3) + (1)(2) = 5$

2. เขียน 5 ต่อจากขั้นที่ 1 เป็น $0\;0_1\;{}_5$

$$\begin{array}{r} 1\;\;2\;\;0\;\;1 \\ 1\;\;3\;\;1\;\;2\;\times \\ \hline 0\;0_1\;0_5\;{}_7 \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3

1. หาผลบวกของผลคูณตามแนวไขว้ของหลักพันและหลักสิบ กับผลคูณแนวตั้งหลักร้อยได้ $[1\times1+0\times1]+(2\times3)=7$

2. เขียน 7 ต่อจากขั้นที่ 2 เป็น $0\;0_1\;0_5\;{}_7$

$$\begin{array}{r} 1\;\;2\;\;0\;\;1 \\ 1\;\;3\;\;1\;\;2\;\times \\ \hline 0\;0_1\;0_5\;0_7\;{}_5 \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4

1. หาผลบวกของผลคูณตามแนวไขว้ของหลักพันและหลักหน่วย กับผลคูณแนวไขว้หลักร้อยกับหลักสิบได้

$$[1\times2+1\times1]+[2\times1+3\times0]=5$$

2. เขียน 5 ต่อจากขั้นที่ 3 เป็น $0\;0_1\;0_5\;0_7\;{}_5$

$$\begin{array}{r} 1\;\;2\;\;0\;\;1 \\ 1\;\;3\;\;1\;\;2\;\times \\ \hline 0\;0_1\;0_5\;0_7\;0_5\;{}_7 \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 5

1.หาผลบวกของผลคูณตามแนวไขว้ของหลักหลักและหลักหน่วย กับผลคูณแนวตั้งหลักสิบได้ $[2\times2+3\times1]+(0\times1)=7$

2. เขียน 7 ต่อจากขั้นที่ 4 เป็น $0\;0_1\;0_5\;0_7\;0_5\;{}_7$

$$\begin{array}{r} 1\;2\;\;0\;1\;\; \\ \underline{1\;3\;\;1\;2}\;\times \\ \begin{array}{ccccccc} 0&0&0&0&0&0& \\ &{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 1} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 6

1. หาผลบวกของผลคูณตามแนวไขว้ของหลักสิบและหลักหน่วยได้

$1\times1+0\times2=1$

2. เขียน 1 ต่อจากขั้นที่ 5 เป็น $\begin{array}{ccccccc} 0&0&0&0&0&0& \\ &{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 1} \end{array}$

$$\begin{array}{r} 1\;2\;\;0\;1\;\; \\ \underline{1\;3\;\;1\;2}\;\times \\ \begin{array}{cccccccc} 0&0&0&0&0&0&0&2 \\ &{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 1}& \end{array} \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 7

1. หาผลคูณตามแนวตั้งหลักหน่วยได้ $2\times1=2$

2. เขียน 1 ต่อจากขั้นที่ 5 เป็น $\begin{array}{cccccccc} 0&0&0&0&0&0&0&2 \\ &{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 1}& \end{array}$

$$\begin{array}{r} 1\;2\;\;0\;1\;\; \\ \underline{1\;3\;\;1\;2}\;\times \\ \begin{array}{cccccccc} 0&0&0&0&0&0&0&2 \\ &{\scriptstyle 1}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 7}&{\scriptstyle 1}& \end{array} \\ \hline \underline{\underline{1\;5\;7\;5\;7\;1\;2}} \end{array}$$

ขั้นที่ 8

นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกันมาบวกกันจากซ้ายไปขวา จะได้ผลลัพธ์ คือ 1575712

ดังนั้น $1201\times1312=1,575,712$

หรือเราอาจ แบ่งแต่ละจำนวนเป็น 2 ส่วน $12/01\times13/12$ **แล้วหาผลคูณดังนี้**

$$\begin{array}{r} 1\;2\;\;\;0\;1\;\; \\ \underline{1\;3\;\;\;1\;2}\;\times \\ \begin{array}{cccc} 0&1&& \\ &&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 6} \end{array}\qquad\qquad \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1

1. หาผลคูณตามแนวตั้งจะได้ $12\times13=156$

2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีสองหลักคูณกับจำนวนที่มีสองหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $2+2=4$ หลัก

3. เขียน 156 ให้มีสี่หลักและมีตัวห้อยสองหลักตรงกับส่วนแรกได้คือ

$\begin{array}{cccc} 0&1&& \\ &&{\scriptstyle 5}&{\scriptstyle 6} \end{array}$

$$\begin{array}{rrl} & 1\ 2\quad 0\ 1 & \\ & 1\ 3\quad 1\ 2 & \times \\ \cline{2-2} 0\ 1\ 0\ 1 & & \\ {}_{5\ 6\ 5\ 7} & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2

1. หาผลบวกของผลคูณไขว้จะได้ $(12)(12)+(13)(01) = 157$
2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีสองหลักคูณกับจำนวนที่มีสองหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $2+2=4$ หลัก
3. เขียน 157 ให้มีสี่หลักและมีตัวห้อยสองหลักตรงกับส่วนที่สองได้ คือ $0\ 1_{5\ 7}$

$$\begin{array}{rrl} & 1\ 2\quad 0\ 1 & \\ & 1\ 3\quad 1\ 2 & \times \\ \cline{2-2} 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 0\ 1\ 2 & \\ {}_{5\ 6\ 5\ 7} & & \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3

1. หาผลคูณตามแนวตั้งจะได้ $(01)\times(12) = 12$
2. คำตอบที่ได้เกิดจากจำนวนที่มีสองหลักคูณกับจำนวนที่มีสองหลัก ดังนั้นคำตอบที่ได้จะมี $2+2=4$ หลัก
3. เขียน 12 ให้มีสี่หลักเป็นตัวปิดได้คือ $0\ \ 0\ \ 1\ \ 2$

$$\begin{array}{rrl} & 1\ 2\quad 0\ 1 & \\ & 1\ 3\quad 1\ 2 & \times \\ \cline{2-2} 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 0\ 1\ 2 & \\ {}_{5\ 6\ 5\ 7} & & \\ \hline \multicolumn{2}{r}{1\ 5\ 7\ 5\ 7\ 1\ 2} & \\ \hline\hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4

นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกันมาบวกกันจากซ้ายไปขวา จะได้ผลลัพธ์ คือ 1575712

ดังนั้น $1201\times1312=1,575,712$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลคูณของ 312×1011

วิธีทำ

$$\begin{array}{rrl} & 3\quad 1\ 2 & \\ & 1\ 0\quad 1\ 1 & \times \\ \cline{2-2} 0\ 0\ 1 & 0\ 1\ 3\ 2 & \\ {}_{3\ 0} & {}_{5\ 3}\qquad & \\ \hline 0\ 3\ 1 & 5\ 4\ 3\ 2 & \\ \hline\hline \end{array}$$

ดังนั้น $312\times1011=315,432$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลคูณของ 198×303

ในตัวอย่างนี้ จะสังเกตเห็นว่าจำนวนแรกตัวเลขบางหลักมีค่าเกิน 5 เราสามารถลดค่าโดยเปลี่ยนเป็นจำนวนวินคิวลัม ดังนี้

วิธีที่ 1

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 0 & \bar{2} & & \\ & 3 & 0 & 3 & \times & \\ \cline{2-4} 0 & \underset{6}{0} & \underset{0}{0} & \underset{0}{0} & 0 & \bar{6} \\ \hline 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & \bar{6} \\ \hline\hline \end{array} = \underline{\underline{59994}}$$

วิธีที่ 2

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 0 & & \bar{2} \\ & & 3 & 0 & & 3 \quad \times \\ \cline{3-6} 0 & 6 & \underset{0}{0} & \underset{0}{0} & \underset{0}{0} & \bar{6} \\ \hline 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & \bar{6} \\ \hline\hline \end{array} = \underline{\underline{59994}}$$

ดังนั้น $20\bar{2} \times 303 = 59,994$

หมายเหตุ การเลือกวิธีการแยกที่ละส่วนของสองจำนวนที่จะหาผลคูณข้างต้น ตัวอย่างสุดท้ายจะเป็นทางเลือกที่ดีที่สุดเพราะตัวเลขส่วนหลักขวาสุดจะมีกี่ตำแหน่งก็ได้ แต่หลักสุดท้ายคูณกันจะมีตำแหน่งเดียวจึงมีแนวโน้มหลีกเลี่ยงการทด **ที่จริงแล้วรูปแบบการคูณ แนวตั้ง/แนวไขว้/แนวตั้ง ที่ใช้กับเลขสองจำนวนที่มี 2 หลัก แต่เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับจำนวนที่มีตัวเลขสามหลักหรือสี่หลักโดยการแยกที่ละส่วนนั้น เราอาจไม่แยกที่ละส่วนก็ได้ ซึ่งจำนวนเต็มที่มีหลักเกิน 2 หลักก็มีแบบแผนเฉพาะเช่นกัน และสามารถพิสูจน์ได้**

พิสูจน์เชิงพีชคณิต

เนื่องจาก $(ax+b)(cx+d) = (ac)x^2 + (ad+bc)x + bd$

ให้ $x = 10$ ดังนั้น $(a \cdot 10 + b)(c \cdot 10 + d) = (ac)10^2 + (ad+bc)10 + bd$

นั่นคือ

$$\begin{array}{c} a \qquad\quad b \\ \underline{c \qquad\quad d} \quad \times \\ \underline{\underline{ac / ad + cb / bd}} \end{array}$$

2.2.3 การคูณด้วยการใช้จำนวนวินคิวลัม (USING THE VINCULUM NUMBERS)

เราจะใช้จำนวนวินคิวลัมช่วยในการดำเนินการคูณ ซึ่งได้อธิบายจำนวนวินคิวลัมจากเรื่องการดำเนินการลบ ซึ่งจะทำให้การดำเนินการคูณง่ายและเร็วขึ้น ผลคูณของจำนวนแต่ละตัวในรูปจำนวนวินคิวลัม การดำเนินการคูณเป็นไปตามสมบัติด้านพีชคณิต (Algebraic Properties)

ตัวอย่างที่ 1

1) $3\times 2=6$
2) $\bar{2}\times 4=-2\times 4=-8=\bar{8}$
3) $\bar{3}\times \bar{2}=-3\times(-2)=6$
4) $2\times \bar{3}=2\times(-3)=-6=\bar{6}$
5) $\bar{4}\times 3=-4\times(3)=-12=\overline{12}$
6) $4\times \bar{5}=4\times(-5)=-20=\overline{20}$
7) $\bar{3}\times \bar{4}=-3\times(-4)=12.$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $49\times 34=5\bar{1}\times 34$

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccc} & & 5 & \bar{1} \\ & & 3 & 4 \\ \hline 1 & \underset{5}{1} & \underset{7}{0} & \bar{4} \\ \hline \end{array}\ \times$$

$$\underline{1\ 6\ 7\ \bar{4}}=\underline{\underline{1\,6\,6\,6}}$$

เราเขียน 49 เป็น $5\bar{1}$ เพื่อลดค่าของตัวเลขที่มากกว่า 5 แล้วดำเนินการตามขั้นตอนของการคูณแนวตั้งและแนวไขว้ จะได้ $5\times 3=15$, $(5\times 4)+(\bar{1}\times 3)=17$, $\bar{1}\times 4=\bar{4}$ ได้ผลคูณเป็น $167\bar{4}$ แล้วเปลี่ยนเป็นจำนวนปกติจะได้ $167\bar{4}=1666$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 48×38

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccc} & & 5 & \bar{2} \\ & & 4 & \bar{2} \\ \hline 2 & \underset{0}{\bar{1}} & \underset{\bar{8}}{0} & 4 \\ \hline \end{array}\ \times$$

$$\underline{\underline{2\ \bar{1}\ \bar{8}\ 4=1\ 8\ 2\ 4}}$$

เราเขียน 48 เป็น $5\bar{2}$ และเขียน 38 เป็น $4\bar{2}$ เพื่อลดค่าเลขมากกว่า 5 ให้มีค่าไม่มากกว่า 5 แล้วดำเนินการตามขั้นตอนของการคูณแนวตั้งและแนวไขว้ จะได้ $5\times 4=20$, $5\times\bar{2}+\bar{2}\times 4=\overline{18}$, $\bar{2}\times\bar{2}=04$ ได้ผลคูณเป็น $2\bar{1}\bar{8}4$ เปลี่ยนเป็นจำนวนปกติได้ $2\bar{1}\bar{8}4=1824$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 79×87

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & \bar{2} & \bar{1} & \\ & & 1 & \bar{1} & \bar{3} & \times \\ \hline 0 & \underset{1}{0} & \underset{\bar{3}}{0} & \underset{\bar{2}}{0} & \underset{7}{0} & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{\underline{0\ 1\ \bar{3}\ \bar{2}\ 7\,3=0\ 0\ 6\ 8\ 7\,3}}$$

ลดค่าของตัวเลขที่มากกว่า 5 ให้น้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 แล้วดำเนินการตามขั้นตอนของการคูณแนวตั้งและแนวไขว้ จะได้ $1\times1=01$, $1\times\bar{1}+\bar{2}\times1=0\bar{3}$, $1\times\bar{3}+\bar{1}\times1+\bar{2}\times\bar{1}=0\bar{2}$, $\bar{2}\times\bar{3}+\bar{1}\times\bar{1}=07$, $\bar{1}\times\bar{3}=03$ ได้ผลคูณเป็น $01\bar{3}\bar{2}73$ แล้วเปลี่ยนเป็นจำนวนปกติจะได้ $01\bar{3}\bar{2}73=6873$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 การคูณแบบแนวตั้งและแนวไขว้

1. $\begin{array}{r} 23 \\ \underline{21}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	2. $\begin{array}{r} 14 \\ \underline{22}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	3. $\begin{array}{r} 66 \\ \underline{43}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	4. $\begin{array}{r} 39 \\ \underline{52}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$
5. $\begin{array}{r} 41 \\ \underline{31}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	6. $\begin{array}{r} 23 \\ \underline{41}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	7. $\begin{array}{r} 35 \\ \underline{23}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	8. $\begin{array}{r} 52 \\ \underline{34}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$
9. $\begin{array}{r} 41 \\ \underline{31}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	10. $\begin{array}{r} 23 \\ \underline{41}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	11. $\begin{array}{r} 62 \\ \underline{53}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	12. $\begin{array}{r} 45 \\ \underline{55}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$
13. $\begin{array}{r} 43 \\ \underline{53}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	14. $\begin{array}{r} 33 \\ \underline{44}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	15. $\begin{array}{r} 73 \\ \underline{55}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	16. $\begin{array}{r} 56 \\ \underline{63}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$
17. $\begin{array}{r} 53 \\ \underline{76}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	18. $\begin{array}{r} 81 \\ \underline{68}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	19. $\begin{array}{r} 76 \\ \underline{65}\ \times \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$	20. $\begin{array}{r} 85 \\ \underline{65} \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array}$

21. 73
76 ×

22. 61
67 ×

23. 86
85 ×

24. 94
96

25. 25
15 ×

26. 65
75 ×

27. 85
85 ×

28. 95
85 ×

แบบฝึกหัดชุดที่ 3 การคูณด้วยการใช้จำนวนวินคิวลัม การใช้จำนวนวินคิวลัมในการคูณครั้งนี้ จะลดค่าที่มากกว่า 5 คือ 6,7,8,9 ไม่ให้เกิน 5 จะช่วยให้คิดเลขง่ายและเร็วขึ้น

1. 29
38

2. 39
22

3. 49
43

4. 39
52

5. 49
58

6. 28
42

7. 38
59

8. 52
48

9. 19
38

10. 18
49

11. 62
59

12. 45
59

13. 48
37

14. 69
49

15. 79
55

16. 58
89

17. 57
69

18. 81
68

19. 78
77

20. 88
89

21. 75
88

22. 69
69

23. 89
89

24. 59
88

25. 28
29

26. 69
79

27. 88
87

28. 49
39

แบบฝึกหัดชุดที่ 4 การคูณแบบแนวตั้งและแนวไขว้ ของสองจำนวนสามหลัก

1. 3 1 2
1 2 1

2. 4 1 2
3 2 2

3. 6 3 2
4 3 1

4. 3 9 4
5 1 2

5. 4 1 5
3 1 2

6. 2 3 1
2 3 1

7. 3 5 6
4 2 3

8. 5 2 7
2 3 4

9. 4 5 3
3 1 3

10. 4 2 3
2 4 1

11. 6 2 5
5 3

12. 4 5 6
5 9

13. 4 3 2
7 3

14. 3 3 7
4 4

15. 7 3 6
9 5

16. 5 6 6
5 6 3

17. 5 5 5
7 7 7

18. 1 8 1
6 8 4

19. 1 7 6
3 6 5

20. 8 5 5
6 5 5

21. 7 3 2
2 3 7

22. 6 0 9
6 0 7

23. 2 1 1
2 1 8

24. 9 9 4
4 4 1

25. 5 1 5
5 1 6

26. 8 6 5
7 0 6

27. 4 3 7
3 2 1

28. 3 9 5
8 8 8

29. 321×416

30. 718×325

31. 437×78

32. 395×89

33. 444×77

34. 486×57

35. 843×56

36. 396×96

37. 465×536 38. 786×65 39. 743×47 40. 839×47

แบบฝึกหัดชุดที่ 5. การคูณแบบแนวตั้งและแนวไขว้ ของสองจำนวนสี่หลัก

1. 1 3 3 2
3 2 2 7

2. 4 1 2 3
1 3 2 4

3. 6 3 6 3
4 3 5 1

4. 4 9 9 4
5 1 1 2

5. 5 4 1 5
6 3 3 6

6. 6 0 3 7
3 0 0 4

7. 8 3 3 6
3 1 2 3

8. 1 5 6 3
6 3 0 8

9. 8 4 8 4
4 8 4 8

10. 4 1 2 3
7 2 2 7

11. 6 1 3 2
4 3 3 5

12. 2 3 4 5
6 9 6 9

13. 4 3 2 1 1
3 1 3 1 7

14. 1 4 2 3 7
2 3 4 4 1

15. 7 0 3 7 6
3 0 9 3 5

16. 7 2 3 4 5 6
2 4 1 2 4 1

17. 5 2 2 4
2 7

18. 3 1 2 3
5 1

19. 6 1 1 7
8 3

20. 5 2 0 5 3
2 7

21. $\begin{array}{r} 7326 \\ \underline{237} \\ \\ \underline{\qquad\qquad} \end{array}$

22. $\begin{array}{r} 7609 \\ \underline{607} \\ \\ \underline{\qquad\qquad} \end{array}$

23. $\begin{array}{r} 8291 \\ \underline{218} \\ \\ \underline{\qquad\qquad} \end{array}$

24. $\begin{array}{r} 8794 \\ \underline{445} \\ \\ \underline{\qquad\qquad} \end{array}$

25. $\begin{array}{r} 51547 \\ \underline{4516} \\ \\ \underline{\qquad\qquad} \end{array}$

26. $\begin{array}{r} 68653 \\ \underline{4706} \\ \\ \underline{\qquad\qquad} \end{array}$

27. $\begin{array}{r} 68437 \\ \underline{327} \\ \\ \underline{\qquad\qquad} \end{array}$

28. $\begin{array}{r} 33995 \\ \underline{8888} \\ \\ \underline{\qquad\qquad} \end{array}$

29. 2324×5416

30. 4378×3132

31. 3434×4224

32. 6044×4127

33. 2342×4277

34. 5486×253

35. 8343×173

36. 3496×76

37. 14136×536

38. 3786×43

39. 27243×2247

40. 87397×4733

3. การดำเนินการคูณโดยการเลื่อนตัวคูณ (MOVING MULTIPLIER)

การหาผลคูณในกรณีที่ตัวตั้งมีจำนวนหลายหลักด้วยตัวคูณที่มีหลักเดียว เช่น 4,321 × 2 โดยนำ 2 คูณตัวเลขแต่ละหลักตามแนวตั้งของตัวตั้ง โดยมองให้เลื่อนไปตามแถวจากซ้ายไปขวา ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 4,321 × 2

วิธีทำ

$$\begin{array}{ccccc} 4&3&2&1& \\ &&&&\times \\ 2&&&& \\ \hline 8&&&& \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 4&3&2&1& \\ &&&&\times \\ &2&&& \\ \hline 8&6&&& \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 4&3&2&1& \\ &&&&\times \\ &&2&& \\ \hline 8&6&4&& \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 4&3&2&1& \\ &&&&\times \\ &&&2& \\ \hline 8&6&4&2& \\ \hline\hline \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 76348 × 5

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccc} 7&6&3&4&8&\times \\ 5&&&&& \\ \hline 3&&&&& \\ {}_5&&&&& \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 1 หาผลคูณตามแนวตั้งของ 7 × 5 = 35
เขียน 3 ห้อย 5

$$\begin{array}{cccccc} 7&6&3&4&8&\times \\ &5&&&& \\ \hline 3&3&&&& \\ {}_5&{}_0&&&& \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2 หาผลคูณตามแนวตั้งของ 6 × 5 = 30
เขียน 3 ห้อย 0

$$\begin{array}{cccccc} 7&6&3&4&8&\times \\ &&5&&& \\ \hline 3&3&1&&& \\ {}_5&{}_0&{}_5&&& \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 3. หาผลคูณตามแนวตั้งของ 3 × 5 = 15
เขียน 1 ห้อย 5

$$\begin{array}{cccccc} 7&6&3&4&8&\times \\ &&5&&& \\ \hline 3&3&1&2&& \\ {}_5&{}_0&{}_5&&{}_0& \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 4 หาผลคูณตามแนวตั้งของ 4 × 5 = 20
เขียน 2 ห้อย 0

]

$$\begin{array}{cccccc} & 7 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ & & & & & 5 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 0} & \\ \hline \end{array} \times$$

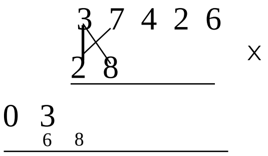
ขั้นที่ 5 หาผลคูณตามแนวตั้งของ 8 × 5 = 40 เขียน 4 และ 0

$$\begin{array}{cccccc} & 7 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ & & & & & 5 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 0} & \\ \hline 3 & 8 & 1 & 7 & 4 & 0 \\ \hline\hline \end{array} \times$$

ขั้นตอนที่ 6 นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกัน มาบวกกันจากซ้ายไปขวา ได้ผลลัพธ์คือ 381,740

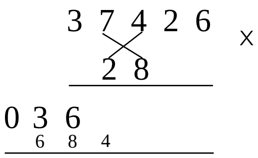
ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 37,426 × 28

วิธีทำ

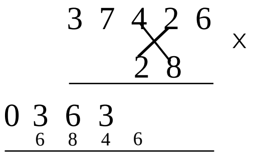


ขั้นที่ 1 3 × 2 = 06 เขียน 0 ห้อย 6

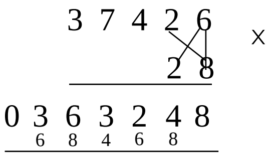
$(3\times8)+(7\times2)=38$ เขียน 3 ห้อย 8



ขั้นที่ 2 $(7\times8)+(4\times2)=64$ เขียน 6 ห้อย 4



ขั้นที่ 3 $(4\times8)+(2\times2)=36$ เขียน 3 ห้อย 6



ขั้นที่ 4 $(2\times8)+(6\times2)=28$ **เขียน 2 ห้อย 8**

6 × 8 = 48 เขียน 4 และ 8

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 3 & 7 & 4 & 2 & 6 & \times \\
 & & & & & 2 & 8 & \\ \hline
0 & 3 & 6 & 3 & 2 & 4 & 8 & \\
 & \scriptstyle 6 & \scriptstyle 8 & \scriptstyle 4 & \scriptstyle 6 & \scriptstyle 8 & & \\ \hline
1 & 0 & 4 & 7 & 9 & 2 & 8 & \\ \hline\hline
\end{array}$$

ขั้นที่ 5
นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกัน มาบวกกันจากซ้ายไปขวา ได้ผลลัพธ์คือ 1,047,928

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ 37,426 × 283

วิธีทำ

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 3 & 7 & 4 & 2 & 6 & \times \\
 & & & 2 & 8 & 3 & & & \\ \hline
0 & 3 & 7 & & & & & & \\
 & \scriptstyle 6 & \scriptstyle 8 & \scriptstyle 3 & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

ขั้นที่ 1 $3 \times 2 = 06$ เขียน 0 ห้อย 6
$(3\times8)+(7\times2)=38$ เขียน 3 ห้อย 8
$(3\times3)+(4\times2)+(7\times8)=73$ เขียน 7 ห้อย 3

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 3 & 7 & 4 & 2 & 6 & \times \\
 & & & & 2 & 8 & 3 & & \\ \hline
0 & 3 & 7 & 5 & & & & & \\
 & \scriptstyle 6 & \scriptstyle 8 & \scriptstyle 3 & \scriptstyle 7 & & & & \\ \hline
\end{array}$$

ขั้นที่ 2 $(7\times3)+(2\times2)+(4\times8)=57$
เขียน 5 ห้อย 7

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 3 & 7 & 4 & 2 & 6 & \times \\
 & & & & & 2 & 8 & 3 & \\ \hline
0 & 3 & 7 & 5 & 4 & 5 & 1 & 8 & \\
 & \scriptstyle 6 & \scriptstyle 8 & \scriptstyle 3 & \scriptstyle 7 & \scriptstyle 0 & \scriptstyle 4 & & \\ \hline
\end{array}$$

ขั้นที่ 3 $(4\times3)+(6\times2)+(2\times8)=40$ เขียน 4 ห้อย 0
$(2\times3)+(6\times8)=54$ เขียน 5 ห้อย 4
$6 \times 3 = 18$ เขียน 1 และ 8

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 3 & 7 & 4 & 2 & 6 & \times \\
 & & & & & 2 & 8 & 3 & \\ \hline
0 & 3 & 7 & 5 & 4 & 5 & 1 & 8 & \\
 & \scriptstyle 6 & \scriptstyle 8 & \scriptstyle 3 & \scriptstyle 7 & \scriptstyle 0 & \scriptstyle 4 & & \\ \hline
1 & 0 & 5 & 9 & 1 & 5 & 5 & 8 & \\ \hline\hline
\end{array}$$

ขั้นที่ 4 นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกัน มาบวกกันจากซ้ายไปขวา ได้ผลลัพธ์คือ 10,591,558

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของ 37,426 × 2,835

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
3\;7\;4\;2\;6\\
\times\\
\underline{2\;8\;3\;5}\\
0\;3\;7\;7\qquad\qquad\\
\underline{\scriptstyle 6\;\;8\;\;3\;\;2\qquad\qquad\qquad}
\end{array}$$

ขั้นที่ 1 3 × 2 = 06 เขียน 0 ห้อย 6

$(3\times8)+(7\times2)=38$ เขียน 3 ห้อย 8

$(3\times3)+(4\times2)+(7\times8)=73$ เขียน 7 ห้อย 3

$(3\times5)+(2\times2)+(7\times3)+(4\times8)=72$

เขียน 7 ห้อย 2

$$\begin{array}{r}
3\;7\;4\;2\;6\\
\times\\
\underline{2\;8\;3\;5}\\
0\;\;3\;\;7\;\;7\;\;7\;\;7\;\;2\;\;3\;\;0\\
\underline{\scriptstyle 6\;\;\;8\;\;\;3\;\;\;2\;\;\;5\;\;\;4\;\;\;8\qquad}
\end{array}$$

ขั้นที่ 2 $(7\times5)+(6\times2)+(2\times8)+(4\times3)=75$

เขียน 7 ห้อย 5

$(4\times5)+(6\times8)+(2\times3)=74$

เขียน 7 ห้อย 4

$(2\times5)+(6\times3)=28$ เขียน 2 ห้อย 8

6 × 5 = 30 เขียน 3 และ 0

$$\begin{array}{r}
3\;7\;4\;2\;6\\
\times\\
\underline{2\;8\;3\;5}\\
0\;\;3\;\;7\;\;7\;\;7\;\;7\;\;2\;\;3\;\;0\\
\underline{\scriptstyle 6\;\;\;8\;\;\;3\;\;\;2\;\;\;5\;\;\;4\;\;\;8\qquad}\\
\underline{\underline{1\;\;0\;6\;1\;0\;\;2\;7\;1\;0}}
\end{array}$$

ขั้นที่ 4 นำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกัน มาบวกกันจากซ้ายไปขวา ได้ผลลัพธ์คือ 106,102,710

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลคูณของ 360.12 × 5.2

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
3\;6\;0\,.\,1\;2\\
\times\\
\underline{5\,.\,2}\\
1\;3\;1\;0\;1\;0\;\;4\\
\underline{\scriptstyle 5\;\;6\;\;2\;\;5\;\;2\quad}\\
\underline{\underline{1\;8\;7\;\;2\,.6\;2\;\;4}}
\end{array}$$

วิธีคิด 3 × 5 = 15 เขียน 1 ห้อย 5

$(3\times2)+(6\times5)=36$ เขียน 3 ห้อย 6

$(6\times2)+(0\times5)=12$ เขียน 1 ห้อย 2

$(0\times2)+(1\times5)=05$ เขียน 0 ห้อย 5

$(1\times2)+(2\times5)=12$ เขียน 1 ห้อย 2

2 × 2 = 04 เขียน 0 และ 4

นั่นคือ 360.12 × 5.2 = 1,872.624

สรุปการดำเนินการคูณโดยการเลื่อนตัวคูณ มีหลักการดังนี้

1. ตัวตั้งควรมีจำนวนหลักมากกว่าตัวคูณ
2. การตั้งคูณจากซ้ายไปขวา จะตั้งคูณจากหลักซ้ายสุดของตัวตั้งและตัวคูณ โดยใช้หลักการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้ หาผลคูณของแต่ละหลัก แล้วเขียนผลคูณแบบห้อยตรงตามหลัก
3. เลื่อนตัวคูณไปทางขวาทีละหลัก แล้วคูณโดยใช้หลักการคูณแนวตั้งและการคูณไขว้ตามลำดับจนเลื่อนถึงหลักหน่วย
4. ผลลัพธ์ของผลคูณ จะนำผลคูณทั้งสองแถวในหลักเดียวกันมาบวกกันจากซ้ายไปขวา

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 การคูณโดยการเลื่อนตัวคูณ

1. 1 3 2 1 × 3 1
2. 1 4 2 3 7 × 2 3
3. 2 1 3 2 × 3 3
4. 2 3 0 2 1 × 4 1
5. 5 2 2 4 × 2 7
6. 3 1 2 3 × 5 1
7. 6 1 1 7 × 8 3
8. 5 2 0 5 3 × 2 7
9. 7 3 2 6 × 2 3 7
10. 7 6 0 9 × 6 0 7
11. 8 2 9 1 × 2 1 8
12. 8 7 9 4 × 4 4 5
13. 5 1 5 4 7 × 4 5 1 6
14. 6 8 6 5 3 × 4 7 0 6
15. 6 8 4 3 7 × 3 2 7
16. 3 3 9 9 5 × 8 8 8 8

17. 2324×54

18. 4378×32

19. 3434×42

20. 5486×25

21. 2342×348

22. 6044×127

23. 8343×417

24. 3496×311

25. 31684×2134

26. 60435×1367

27. 61457×4314

28. 44263×5061

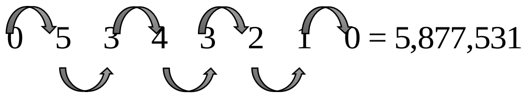
29. 0.343×0.022

30. 0.4396×0.18

เทคนิคเพิ่มเติม **การคูณโดยการเลื่อนตัวคูณ ในกรณีที่ตัวคูณเป็น 11 กับ 9 สามารถหาผลลัพธ์จากซ้ายไปขวาได้ง่ายและรวดเร็ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้**

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลคูณของ $534,321\times 11$

วิธีคิด ให้ใส่เลข 0 ที่ตัวหน้าและตัวหลังของตัวตั้ง แล้วหาผลบวกโดยเริ่มจากซ้ายไปขวาของตัวเลขหลักที่หนึ่งกับหลักที่สองถัดไปหาผลบวกของตัวเลขหลักที่สองกับหลักที่สาม ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ดังนี้

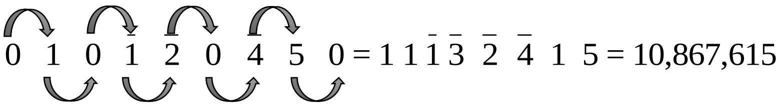


$$0\ 5\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0 = 5,877,531$$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลคูณของ $987,965\times 11$

จะเห็นได้ว่ามีตัวเลขหลายหลักที่เกิน 5 แปลงตัวเลขด้วยวิธีนิขิลัมสูตร จะได้ $987965 = 10\bar{1}\bar{2}0\bar{4}5$

วิธีคิด $987965\times 11 = 10\bar{1}\bar{2}0\bar{4}5\times 11$

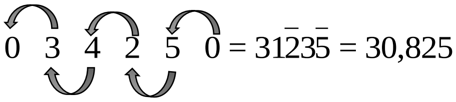


$$0\ 1\ 0\ \bar{1}\ \bar{2}\ 0\ \bar{4}\ 5\ 0 = 1\ 1\ \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{4}\ 1\ 5 = 10,867,615$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลคูณของ $3,425\times 9$

วิธีคิด ตัวคูณคือ 9 แปลงตัวเลขด้วยวิธีนิขิลัมสูตร จะได้ $3425\times 9 = 3425\times 1\bar{1}$

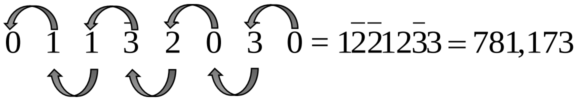
ให้ใส่เลข 0 ที่ตัวหน้าและตัวหลังของตัวตั้ง แล้วหา**ผลต่าง**โดยเริ่มจากซ้ายไปขวาของตัวเลขหลักที่สองกับหลักที่หนึ่ง ถัดไปหา**ผลต่าง**ของตัวเลขหลักที่สามกับหลักที่สอง ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ดังนี้



$$0\quad 3\quad 4\quad 2\quad 5\quad 0 = 31\bar{2}3\bar{5} = 30,825$$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลคูณของ $86,797\times 9$

วิธีคิด ตัวคูณคือ 9 แปลงตัวเลขด้วยวิธีนิขิลัมสูตร จะได้ $86797\times 9 = 1\bar{1}\bar{3}\bar{2}0\bar{3}\times 1\bar{1}$



$$0\quad 1\quad 1\quad \bar{3}\quad 2\quad 0\quad 3\quad 0 = 1\bar{2}\bar{2}12\bar{3}3 = 781,173$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

การคูณโดยการเลื่อนตัวคูณ 11 กับ 9

1. 14136×11
2. 3786×11
3. 27243×11
4. 87397×11
5. 2324×9
6. 4378×9
7. 3434×9
8. 6044×9
9. 2342×9
10. 5486×9
11. 8343×9
12. 3496×9
13. 0.023×0.11
14. 0.043×0.011
15. $5.486\times .009$

3. การดำเนินการการคูณแบบเทคนิค

3.1 การคูณโดยใช้สัดส่วนช่วยในการคำนวณ

สัดส่วน(Proportion) หมายถึง หลายๆ อัตราส่วนที่เทียบเท่ากันซึ่งเป็นพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นสัดส่วนจึงเป็นเครื่องมือที่สามารถใช้ในการคำนวณ โดยเฉพาะการคูณด้วยตัวคูณ 4,8,16,...และ 20,40,160,... เป็นต้น

การหาสองเท่าของจำนวนหนึ่งนั้นง่ายกว่าการคูณจำนวนนั้นด้วยสอง เช่น ตัวคูณเป็น 4 เราจะใช้วิธีการหาสองเท่าของจำนวนนั้นแล้วทบเป็นสองเท่าอีกครั้งดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 53×4

ถ้าเราจะหาผลคูณของ 53×4 แทนที่เราจะใช้วิธีการคูณด้วย 4 แต่เราอาจใช้วิธีที่สามารถคิดในใจได้ โดยการหาสองเท่าของ 53 สองครั้ง ดังนี้

สองเท่า ของ 53 ได้ 106

และสองเท่า ของ 106 อีก ได้ 212

ดังนั้น คำตอบของ $53\times4=212$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 255×8

ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างที่ 1 แทนที่เราจะหาผลคูณ 255 กับ 8

เราก็หาสองเท่าของ 225 ได้ 450

แล้วทบเป็นสองเท่าครั้งที่สองของ 450 ได้ 900 และทบเป็นสองเท่าครั้งที่สามของ 900 ได้ 1800

ดังนั้น คำตอบของ $255\times8=1800$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ $7\frac{1}{2}\times4$

หาสองเท่าครั้งที่หนึ่งของ $7\frac{1}{2}$ ได้ 15

แล้วทบเป็นสองเท่าครั้งที่สองของ 15 ได้ 30

ดังนั้น คำตอบของ $7\frac{1}{2}\times4=30$

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นสามารถนำมาประยุกต์ กับการคูณด้วย $40,800,...$ ให้คูณได้ง่าย โดยการหาสองเท่าของส่วนที่อยู่หน้าเลขศูนย์ของจำนวนนั้น แล้วเพิ่มศูนย์ท้ายชองผลลัพธ์

เช่น 17×40 **คิดในใจ สองเท่าของ** 17 **ได้** 34 **และสองเท่าของ** 34 **ได้** 68 **แล้วเติม** 0 **ลงท้ายหนึ่งตัว ตอบ** 680

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

จงหาสองเท่าของจำนวนต่อไปนี้

1) 24
2) 41
3) 14
4) 45
5) 15
6) 25
7) 36
8) 27
9) 18
10) 29
11) 34
12) 48
13) 58
14) 61
15) 73
16) 65
17) 66
18) 88
19) 76
20) 91
21) 380
22) 362
23) 453
24) 612
25) 319
26) 707
27) 619
28) 472
29) 1234
30) 663

จงหาผลคูณของจำนวนต่อไปนี้

1) 53×4
2) 28×4
3) 61×4
4) 18×4
5) 33×4
6) 81×4
7) 16×4
8) 16×8
9) 22×8
10) 45×8
11) 17×8
12) 22×8
13) 45×8
14) $8\frac{1}{2}\times 4$
15) $11\frac{1}{2}\times 4$
16) $19\frac{1}{2}\times 4$
17) $2\frac{1}{2}\times 4$
18) $5\frac{1}{2}\times 8$
19) $9\frac{1}{2}\times 4$
20) $30\frac{1}{2}\times 4$

3.2 การขยายสูตรคูณ (Extending the Multiplication Table)

สมมุติเราจะหาผลคูณของ 14×18 เราอาจจะจำสูตรคูณแม่ 14 หรือ 18 ไม่ได้ แต่เราอาจจะจำ $7\times9=63$ ได้ และ 14 กับ 18 เป็นสองเท่าของ 7 กับ 9 ตามลำดับ

เมื่อ 14 กับ 18 เป็นสองเท่าของ 7 กับ 9 เราก็หาสองเท่าของ 63 สองครั้ง สองเท่าของ 63 ได้ 126 สองเท่าของ 126 ได้ 252 คำตอบคือ 252

ในทำนองเดียวกัน
$$\begin{aligned}14\times16&=\left(2\times7\right)\times\left(2\times8\right)\\&=\left(2\times2\right)\times\left(7\times8\right)\\&=4\times\left(56\right)\end{aligned}$$

จะได้ว่า ทบ 56 ได้ 112 ทบ 112 ได้ 224 คำตอบคือ 224

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณ 17×14 เราสามารถกระจายเป็น

$$\left(16+1\right)\times14=\left(16\times14\right)+14=\left(2^4\times14\right)+14$$

หาสองเท่าของ 14 ได้ 28

แล้วหาทบสองเท่าครั้งที่สองของ 28 ได้ 56

และหาทบสองเท่าครั้งที่สามของ 56 ได้ 112

และหาทบสองเท่าครั้งที่สี่ของ 112 ได้ 224

แล้วนำ $224+14=238$

ดังนั้น คำตอบของ $17\times14=238$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

จงหาผลคูณของจำนวนต่อไปนี้

1) 16×7
2) 18×6
3) 14×7
4) 12×9
5) 4×14
6) 7×18
7) 9×14
8) 16×18
9) 14×16
10) 25×19

3.3 การคูณด้วยตัวคูณ $5, 50, 250, \ldots$ เป็นต้น

การหาค่าครึ่งหนึ่งของจำนวนใดจำนวนหนึ่งนั้นง่ายกว่าการคูณด้วย 5 เพียง เรานำจำนวนที่เป็นตัวตั้งที่จะคูณด้วย 5 ใส่ เลข 0 หนึ่งตัว ต่อท้ายจำนวนนั้น แล้วหาครึ่งหนึ่งของมัน ก็เป็นผลลัพธ์ของการคูณด้วย 5 เพราะว่า 5 เป็นครึ่งหนึ่งของ 10 (หรือ 10 เป็นสองเท่าของ 5)

ตัวอย่างที่ 1 สำหรับ 44×5 เราก็หาครึ่งหนึ่งของ 440 คือ 220 นั่นคือ $44\times5=220$

ตัวอย่างที่ 2 ในทำนองเดียวกัน 68×5 คือหา ครึ่งหนึ่งของ 680 จะได้ 340

ตัวอย่างที่ 3 87×5 คือหาครึ่งหนึ่งของ 870 จะได้ 435

ตัวอย่างที่ 4 452×5 คือหาครึ่งหนึ่งของ 4520 จะได้ 2260

ตัวอย่างที่ 5 27×50 เนื่องจาก 50 เป็นครึ่งหนึ่งของ 100 ดังนั้นต้องใส่ 0 สองตัวต่อท้าย 27 เป็น 2700 แล้วหาครึ่งหนึ่งของ 2700 ได้ 1350 **เป็นคำตอบ**

ตามวิธีคิดดัง ตัวอย่างที่ 5 พิจารณาพบว่าการที่เราใส่ 0 ต่อท้ายจำนวนใดก็ตามผลต้องได้จำนวนคู่ ดังนั้นเราอาจหาครึ่งหนึ่งของจำนวนคู่ โดยแยกที่ละส่วนโดยแต่ละส่วนเป็นจำนวนคู่ เช่น 2700 จะแยกทีละส่วนให้เป็นจำนวนคู่ดังนี้ $2/70/0$ แล้วหาครึ่งหนึ่งของแต่ละส่วนจะได้ 1 และ 35 และ 0 คำตอบคือ 1350

ตัวอย่างหนึ่ง เช่น ครึ่งหนึ่งของแต่ละส่วนของ 4520 คือ $4/52/0$ จะได้ **คำตอบคือ** 2260 เป็นต้น

แต่ในกรณี ครึ่งหนึ่งของจำนวนคี่จะต้องใช้การหารด้วย ซึ่งจะกล่าวในเรื่องการหารต่อไป

สำหรับการคูณด้วย 25 เรามีวิธีคิดโดยคูณด้วย 100 ก่อนแล้วหาครึ่งหนึ่งของจำนวนนี้ 2 ครั้ง เพราะว่า 25 เป็นครึ่งหนึ่งของครึ่งหนึ่งของ 100 ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 6 82×25 ครึ่งหนึ่งของ 8200 คือ 4100 และหาครึ่งหนึ่งของ 4100 อีกครึ่งอีกครั้งคือ 2050

ตัวอย่างที่ 7 181×25 ครึ่งหนึ่งของ 18100 คือ 09050 (วิธีคิดโดยแบ่งส่วน 18100 เป็น $18/10/0$ ครึ่งหนึ่งคือ $9/05/0$ แล้วหาครึ่งหนึ่งของ 9050 โดยแบ่งส่วนเป็น $90/50$ ครึ่งหนึ่งคือ $45/25$ ดังนั้นคำตอบ 4525

3.4 การคูณด้วยตัวคูณ $5,\ 25,\ 35,\ 45,\ 65,\ 75,\ \ldots$

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณา 46×35 เป็นการคูณจำนวนคู่กับจำนวนคี่ ซึ่งพบว่าถ้าเราใช้วิธีเพิ่มลดสัดส่วนของจำนวนบางจำนวนก็จะหาผลคูณได้รวดเร็ว โดยลดครึ่งหนึ่งของตัวแรกแล้วไปเพิ่มเป็นสองเท่าของตัวที่สอง จะหาผลคูณดังนี้ $46\times35=$ (ลดครึ่งหนึ่งของ 46) x (เพิ่ม 35 เป็นสองเท่า)

$$=23\times70$$
$$=1610$$

ตัวอย่างที่ 2 ในทำนองเดียวกัน $66\times15=33\times30=990$

ตัวอย่างที่ 3 $124\times45=62\times90=5580$

ตัวอย่างที่ 4 $448\times175=224\times350=112\times700=78400$

แบบฝึกหัดชุดที่ 3

จงหาผลคูณของจำนวนต่อไปนี้

1) 68×5
2) 42×5
3) 36×5
4) 56×5
5) 61×5
6) 426×5
7) 803×5
8) 2468×5
9) 46×50
10) 864×50
11) 223×50
12) 1202×50
13) 72×25
14) 48×25
15) 85×25
16) 808×25

3.5 กำลังสองของจำนวนที่ลงท้ายด้วย 5

สูตร มากกว่าอยู่หนึ่งของจำนวนหนึ่งที่อยู่ข้างหน้า คือ “หาผลคูณของจำนวนที่อยู่หน้าเลข 5 กับ จำนวนที่มีค่ามากกว่าตัวหน้าเลข 5 ของจำนวนนั้นอยู่ 1 ใส่เป็นส่วนหน้าของคำตอบ และส่วนหลังของคำตอบใส่ 25 ก็เป็นผลลัพธ์ของเลขที่ยกกำลังสองนั้น ”

เป็นสูตรที่สวยงามและง่ายมากสำหรับการหากำลังสองของจำนวนที่ลงท้ายด้วย 5

ตัวอย่างที่ 1 75 × 75 เรียกว่า กำลังสองของ 75 เขียนแทนด้วย 75^2

ในกรณี 75^2 เราหาผลคูณของ 7 กับจำนวนที่มากกว่า 7 อยู่ 1 คือ $7\times8=56$ เป็นผลลัพธ์ส่วนหน้าของคำตอบ และส่วนหลังของคำตอบคือ $5^2=25$

ดังนั้น $75^2=8\times7/5^2=56/25=5625$

ตัวอย่างที่ 2 ในทำนองเดียวกัน $65^2=\left(6\times7\right)$ กับ 25

$=4225$

ตัวอย่างที่ 3. ในกรณีหา $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$ หรือ $\left(4.5\right)^2$

หาได้โดย $\left(4.5\right)^2=\left(4\times5\right)$ กับ 25

$=2025$

พิสูจน์เชิงพีชคณิต

พิจารณาจาก $(ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$ ให้ $x = 10, b = 5$ ก็จะได้

$$
\begin{aligned}
(10a+5)^2 &= a^2 10^2 + 2(10)a(5) + (5)^2 \\
&= (a^2 + a)\cdot 10^2 + 5^2 \\
&= a(a+1)\cdot 10^2 + 5^2
\end{aligned}
$$

a คือตัวหน้าของ 5 และ $a+1$ คือตัวที่มีค่ามากกว่าตัวหน้าอยู่ 1

แบบฝึกหัดชุดที่ 4 จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

1. $15^2 =$
2. $25^2 =$
3. $35^2 =$
4. $45^2 =$
5. $55^2 =$
6. $65^2 =$
7. $75^2 =$
8. $85^2 =$
9. $95^2 =$
10. $105^2 =$
11. $115^2 =$
12. $12345^2 =$

4. การดำเนินการคูณของเลขสองจำนวนที่ตัวเลขตัวแรกเท่ากัน แต่ตัวเลขตัวหลังของสองจำนวนนั้นบวกกันได้ $10, 100, 1000, \ldots$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 43×47

วิธีทำ 43×47 = 4(4+1)/3×7

= 20/21

= 2,021

43×47 หาได้จากการหาผลคูณของ 4 กับตัวเลขที่มากกว่า 4 อยู่ 1 คือ 5 ได้ $20 = 4 \times 5$ เป็นส่วนหน้าของคำตอบ แล้วหาผลคูณของสองตัวหลังของทั้งสองจำนวนคือ $3 \times 7 = 21$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 62×68

วิธีทำ 62×68 = 6(6+1)/2×8

= 42/16

= 4,216

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 162×168

วิธีทำ 162×168 = 16(16+1)/2×8

= 272/16

= 27,216

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ 254×246

วิธีทำ 254×246 = 2(2+1)/54×46

= 6/2484

= 62,484

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของ $3,462\times3,538$

วิธีทำ 3,462×3,538 = 3(3+1)/462×538

$= 12/2\underset{0}{4}\underset{2}{6}\underset{0}{5}\underset{4}{1}6$

= 12/248556

= 12,248,556

พิสูจน์เชิงพีชคณิต

พิจารณาจาก $(ax+b)(ax+c)=a^2x^2+acx+abx+bc$

$$=a^2x^2+(b+c)ax+bc$$

ให้ $x=10, b+c=10$ ก็จะได้

$$(10a+b)(10a+c)=a^2 10^2+(10)^2 a+bc$$

$$=(a^2+a)\cdot10^2+bc$$

$$=\underbrace{a(a+1)}\cdot\underbrace{10^2+bc}$$

ตัวหน้าของ b, c มากกว่าตัวหน้าของ a อยู่ 1 คือ a + 1

ข้อสังเกต ผลบวกของหลักท้ายที่รวมกันได้ 10,100,1000,... และหลักข้างหน้ามีค่าเท่ากัน เช่น $1,647\times1,653$ จะเห็นว่า $47+53=100$ และ 16 คู่หน้าของทั้งสองจำนวนเท่ากัน

จากเทคนิคการคูณข้างต้น เราสามารถเพิ่มหรือลดค่าของจำนวนที่คูณกัน โดยใช้เทคนิคเรื่องสัดส่วนได้อย่างง่าย ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลคูณของ 88×46

วิธีทำ $88\times46 = 2(44\times46)$

$=2(20/24)$

$= 4,048$

ในกรณีนี้ เราไม่สามารถใช้วิธีคิดแบบข้างต้นได้ พิจารณาตัวหน้า 88 มี 2 เป็นตัวประกอบ เราสามารถแยกตัวประกอบออกเป็น 2×44 ในรูปผลคูณของ $2(44\times46)$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

การคูณเลข 2 จำนวน ที่มากกว่าอยู่หนึ่งของจำนวนหนึ่งที่อยู่ข้างหน้า เมื่อสองจำนวนนั้นมีเลขตัวหน้าเท่ากันแต่หลังบวกกันได้ 10 หรือ 100,1000....

1. 23
$\underline{27}$
2. 24
$\underline{26}$
3. 36
$\underline{34}$
4. 39
$\underline{31}$
5. 41
$\underline{49}$
6. 53
$\underline{57}$
7. 35
$\underline{35}$
8. 52
$\underline{58}$
9. 72
$\underline{78}$
10. 93
$\underline{97}$
11. 62
$\underline{68}$
12. 84
$\underline{86}$
13. 33
$\underline{37}$
14. 46
$\underline{44}$
15. 73
$\underline{77}$
16. 68
$\underline{62}$
17. 513
$\underline{517}$
18. 211
$\underline{289}$
19. 172
$\underline{178}$
20. 828
$\underline{872}$

21. 7 3 7
$\underline{763}$

22. 6 1 9
$\underline{681}$

23. 8 6 7
$\underline{863}$

24. 9 4 5
$\underline{955}$

25. 8 8 3
$\underline{817}$

26. 9 3 9
$\underline{931}$

27. 3 9 7
$\underline{3\ 0\ 3}$

28. 3 3 6
$\underline{3\ 3\ 4}$

29. 7 9 8
$\underline{7\ 0\ 2}$

30. 9 3 6
$\underline{9\ 6\ 4}$

31. 6 9 7
$\underline{6\ 0\ 3}$

32. 5 5 6
$\underline{5\ 5\ 4}$

หมายเหตุ ถ้าสับเปลี่ยนจากการคูณข้างต้นก็จะได้ การดำเนินการคูณของเลขสองจำนวนที่ตัวเลขตัวแรกของสองจำนวนนั้นบวกกันได้ 10,100,1000,... **แต่ตัวเลขตัวหลังเท่ากัน**

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 47×67ข

วิธีทำ $47\times67 = (4\times6)+7/7^2$

$=31/49$

$= 3,149$

แนวคิด พิจารณาเลขสองจำนวนนี้ ตัวหน้าบวกกันได้ 10 คือ $4+6=10$ แต่ตัวหลังของทั้งสองจำนวนเท่ากันคือ $7=7$ หาได้จากการหาผลคูณของ $(4\times6)+7=31$ เป็นส่วนหน้าของคำตอบ แล้วหาผลคูณของสองตัวหลังของทั้งสองจำนวน คือ $7^2=49$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 58×38

วิธีทำ $58\times38 = 6\bar{2}\times4\bar{2}$

$= (6\times4)+\bar{2}/(\bar{2})^2$

$= 22/04$

$= 2,204$

แนวคิด พิจารณาเลขสองจำนวนนี้ ตัวหน้าบวกกันไม่ได้ 10 แต่ตัวหลังของทั้งสองจำนวนเท่ากันคือ $8=8$

<u>หมายเหตุ</u> ต้องแปลงตัวหลังให้เป็นจำนวนในรูปเครื่องหมายบาร์ (¯) เท่านั้น ซึ่งจะพบว่าตัวหน้าบวกกันได้ 10

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 234×774

วิธีทำ $234\times774 = (23\times77)+(4\times10)/4^2$

$= 1771+40/16$

$= 181,116$

แนวคิด พิจารณาเลขสองจำนวนนี้ ตัวหน้าบวกกันได้ 100 ตัวหลังของทั้งสองจำนวนเท่ากันคือ $4=4$

<u>หมายเหตุ</u> ในกรณีนี้หาตัวหน้าได้จาก $(23\times77)+(4\times10) = 1,771$ และตัวหลังได้จาก $4^2=16$

พิสูจน์เชิงพีชคณิต

พิจารณาจาก $(ax+c)(bx+c)=abx^2+(a+b)cx+c^2$

(1) ให้ $x=10, a+b=10$ ก็จะได้

$$(a\cdot10+c)(b\cdot10+c)=ab10^2+(10)c10+c^2$$
$$=(ab+c)10^2+c^2$$

(2) ให้ $x=10, a+b=100$ ก็จะได้

$$(a\cdot10+c)(b\cdot10+c)=ab10^2+(100)c10+c^2$$
$$=(ab+10c)10^2+c^2$$

ดังนั้นวิธีอุปนัย $x=10, a+b=10^2$ ก็จะได้

$$(a\cdot10+c)(b\cdot10+c)=(ab+10^{n-1}c)10^2+c^2$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

การคูณคูณของเลขสองจำนวนที่ตัวเลขตัวแรกของสองจำนวนนั้นบวกกันได้ 10,100,1000,... แต่ตัวเลขตัวหลังเท่ากัน

1. 27
   87
2. 84
   24
3. 36
   76
4. 39
   79
5. 69
   49
6. 57
   57
7. 53
   53
8. 58
   58

๙. 81
   21

10. 61
    41
11. 63
    43
12. 75
    35
13. 436
    576
14. 333
    673
15. 734
    274
16. 569
    449

13. 576
    576
14. 533
    573
15. 574
    574
16. 569
    569

5. การยกกำลังสอง (SQUARING)

สูตรการหาผลคูณด้วยแนวตั้งและแนวไขว้นั้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการยกกำลังสองของจำนวนจริงได้ เพราะเป็นการคูณเลขของจำนวนสองจำนวนที่เท่ากัน ซึ่งดูง่ายและหาคำตอบได้รวดเร็ว

ในกรณีนี้เราจะตั้งนิยาม คำว่า **ทวิคูณ (Duplex)** เพื่อการจดจำง่าย และเกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น

บทนิยาม ทวิคูณของจำนวนจริง (N) แทนด้วย $\mathrm{D(N)}$ โดยที่ $\mathrm{a,b,c,d,e,f,...}$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$D(a) = a^2$

$D(ab) = 2ab$

$D(abc) = 2ac + b^2$

$D(abcd) = 2ad + 2bc$

$D(abcde) = 2ae + c^2 + 2bd$ เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ 43^2

วิธีทำ $43^2 = 16/24/09$

$= 1,849$

ตอบ $1,849$

แนวคิด 1,849 **เกิดจาก**

$D(4) = 4^2 = 16$

$D(43) = 2(4 \times 3) = 24$

$D(3) = 3^2 = 09$

นั่นคือ

$$\begin{array}{c} 1\,2\,0\,9 \\ {\scriptstyle 6\;4} \\ \hline \underline{\underline{1849}} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ 98^2

วิธีทำ $98^2 = (10\bar{2})^2$

$= (10/\bar{2})^2$

$= 100/\overline{40}/04$

$= 10\bar{4}/04 \;\; = 9,604$

ตอบ $9,604$

แนวคิด 98^2 **เกิดจาก**

$D(10) = 10^2 = 100$

$D(10/\bar{2}) = 2(10 \times \bar{2}) = \overline{40}$

$D(\bar{2}) = 04$

นั่นคือ

$$\begin{array}{c} 1\,0\,\bar{4}\,0\,4 \\ {\scriptstyle 6\;0} \\ \hline \underline{\underline{10\bar{4}04}} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3 $(341)^2$

วิธีทำ $(341)^2 = (3/4/1)^2$

$= 9/24/22/08/01$

$= 116,281$

ตอบ $116,281$

แนวคิด

$D(3) = 3^2 = 9$

$D(34) = 2(3\times4) = 24$

$D(341) = 2(3\times1)+4^2 = 22$

$D(41) = 2(4\times1) = 08$

$D(1) = 1^2 = 01$

$D(3)$,$D(34), D(341), D(41), D(1)$

สอดคล้องกับการคูณแนวตั้งและแนวไขว้ โดยยึดวิธีการหาคำตอบแบบนิยามทวิคูณ

$$\begin{array}{c} 0\ 2\ 2\ 0\ 0\ 1 \\ {}_{9\ 4\ 2\ 8} \\ \hline \underline{\underline{1\ 1\ 6,2\ 8\ 1}} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ 4332^2

วิธีทำ $(4332)^2 = (4/3/3/2)^2$

$= 16/24/33/34/21/12/04$

$= 18,766,224$

ตอบ $18,766,224$

$D(4) = 4^2 = 16$

$D(43) = 2(4\times3) = 24$

$D(433) = 2(4\times3)+3^2 = 33$

$D(4332) = 2(4\times2)+2(3\times3) = 34$

$D(332) = 2(3\times2)+3^2 = 21$

$D(32) = 2(3\times2) = 12$

$D(2) = 2^2 = 04$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างบนมีลักษณะสมมาตรกันด้านกับด้านหลัง

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่า 21034^2

วิธีคิดเร็ว $21034^2 = 441_1 2_2 289_2 4_1 6 = 442429156$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่า 192^2

วิธีคิดเร็ว $192^2 = (2\bar{1}2)^2 = (2/\bar{1}/2)^2 = 4\bar{4}9\bar{4}4 = 36864$

แบบฝึกหัดชุดที่ 3

1. จงหากำลังสองของจำนวนต่อไปนี้

1) 31
2) 14
3) 41
4) 26
5) 23
6) 32
7) 21
8) 66
9) 81
10) 91
11) 56
12) 63
13) 77
14) 33
15) 105

2. จงหากำลังสองของจำนวนต่อไปนี้ โดยแบ่งตัวเลขของจำนวนที่กำหนดให้ออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกมีสองตัวเลข

1) 121
2) 104
3) 203
4) 203
5) 113
6) 116
7) 108
8) 111
9) 181
10) 291
11) 156
12) 253
13) 357
14) 373
15) 150

3. จงหากำลังสองของจำนวนต่อไปนี้

1) 1234
2) 3032
3) 7130
4) 7130
5) 32104
6) 3103

6. การคูณโดยการเบี่ยงฐาน

การดำเนินการคูณโดยวิธีการเบี่ยงฐานในเวทคณิต เป็นวิธีการหาผลคูณแบบ**เทคนิควิธี** ของจำนวนสองจำนวนที่คูณกันซึ่งมีค่าใกล้เลขฐาน (เลขฐานคือเลข $10,100,1000,\ldots,10^n$) และค่าที่ใกล้ฐานเรียกว่า **ค่าเบี่ยงฐาน**(deficiency)

ค่าเบี่ยงฐาน จะมีค่าเป็นบวกหรือลบ ขึ้นอยู่กับค่าของแต่ละจำนวนที่จะหาผลคูณ ว่ามีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าฐานนั้น ๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ค่าเบี่ยงฐานจากฐาน 10

8 มีค่าน้อยกว่า 10 อยู่ 2 หมายถึง 8 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 10 เป็น –2
6 มีค่าน้อยกว่า 10 อยู่ 4 หมายถึง 6 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 10 เป็น –4
13 มีค่ามากกว่า 10 อยู่ 3 หมายถึง 13 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 10 เป็น 3
25 มีค่ามากกว่า 10 อยู่ 15 หมายถึง 25 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 10 เป็น 15

ตัวอย่างที่ 2 ค่าเบี่ยงฐานจากฐาน 100

82 มีค่าน้อยกว่า 100 อยู่ 18 หมายถึง 82 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 100 เป็น –18
96 มีค่าน้อยกว่า 100 อยู่ 4 หมายถึง 96 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 100 เป็น –04
105 มีค่ามากกว่า 100 อยู่ 5 หมายถึง 105 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 100 เป็น 05
118 มีค่ามากกว่า 100 อยู่ 18 หมายถึง 118 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 100 เป็น 18

ตัวอย่างที่ 3 ค่าเบี่ยงฐานจากฐาน 1,000

992 มีค่าน้อยกว่า 1,000 อยู่ 8 หมายถึง 992 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 1,000 เป็น –008
986 มีค่าน้อยกว่า 1,000 อยู่ 14 หมายถึง 986 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 1,000 เป็น –014
1,011 มีค่ามากกว่า 1,000 อยู่ 11 หมายถึง 1,011 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 1,000 เป็น 011
1,026 มีค่ามากกว่า 1,000 อยู่ 26 หมายถึง 1,026 มีค่าเบี่ยงฐานจาก 1,000 เป็น 026

6.1 การคูณโดยการเบี่ยงฐานกรณีตัวคูณทั้งสองน้อยกว่าฐาน (NUMBERS JUST BELOW A BASE)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 88×89

วิธีที่ 1

$$\begin{array}{ll} 88 & -12 \\ \underline{98} & \underline{-02} \end{array}$$

ขั้นตอนที่ 1 เขียนค่าเบี่ยงฐานทางขวามือของตัวตั้งและตัวคูณ ซึ่งค่าเบี่ยงฐานของ 88 คือ -12 และ
ค่าเบี่ยงฐานของ 98 คือ -02

$$\begin{array}{ll} 88 & -12 \\ \underline{98} & \underline{-02} \\ 86 & / \end{array}$$

ขั้นตอนที่ 2 หาผลบวกของตัวตั้งและค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณ หรือหาผลบวกของตัวคูณและค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้ง ซึ่งผลบวกที่ได้จะมีค่าเท่ากัน

จะได้ $88 + (-02) = 86$ หรือ $98 + (-12) = 86$

นำผลบวกที่ได้ ใส่ไว้ที่ด้านล่างของตัวคูณ ตรงส่วนแรกของคำตอบ

$$\begin{array}{ll} 88 & -12 \\ \underline{98} & \underline{-02} \\ 86 & /\ 24 \end{array}$$

ขั้นตอนที่ 3 หาผลคูณของค่าเบี่ยงฐาน จะได้ $(-12) \times (-02) = 24$ นำผลคูณที่ได้ ใส่ไว้ที่ด้านล่างของค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณ ตรงส่วนหลังของคำตอบ

$$\begin{array}{ll} 88 & -12 \\ \underline{98} & \underline{-02} \\ 86 & /\ 24 \\ \multicolumn{2}{c}{\underline{\underline{8624}}} \end{array}$$

ขั้นตอนที่ 4 ผลลัพธ์ที่เกิดจากการคูณ คือ 8624

ดังนั้น ผลคูณของ 88×98 คือ 8624

วิธีที่ 2

$$\overset{-12}{88} \times \overset{-02}{98}$$

ขั้นตอนที่ 1 เขียนค่าเบี่ยงฐานไว้ด้านบนของตัวตั้งและตัวคูณ ซึ่ง ค่าเบี่ยงฐานของ 88 คือ -12 และ
ค่าเบี่ยงฐานของ 98 คือ -02

$\overset{-12}{88} \times \overset{-02}{98} = 86\,/\,24$ →

ขั้นตอนที่ 2 ส่วนแรกของคำตอบ คือ

$88 + (-02) = 86$ หรือ $98 + (-12) = 86$

ส่วนหลังของคำตอบ คือ $(-12) \times (-02) = 24$

$\overset{-12}{88} \times \overset{-02}{98} = 86\,/\,24$

$= 8624$ →

ขั้นตอนที่ 3

ผลลัพธ์ที่เกิดจากการคูณ คือ 8624

ดังนั้น ผลคูณของ 88×98 คือ 8624

หมายเหตุ **ในเอกสารเล่มนี้ เราจะใช้วิธีที่ 2 อธิบายการดำเนินการคูณโดยการเบี่ยงฐาน**

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 93×96

วิธีทำ $\overset{-07}{93} \times \overset{-04}{96} = 89\,/\,28$

$= 8928$

ดังนั้น ผลคูณของ 93×96 คือ $= 8928$

หลักการคิด

ค่าเบี่ยงฐานของ 93 คือ -07 และ ค่าเบี่ยงฐานของ 96 คือ -04

ส่วนแรกของคำตอบคือ $93 + (-04) = 89$ หรือ $96 + (-07) = 89$

ส่วนหลังของคำตอบคือ $(-04) \times (-07) = 28$ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการคูณ 93×96 คือ 8928

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 98×97

วิธีทำ $\overset{-02}{98} \times \overset{-03}{97} = 95\,/\,06$

$= 9506$

ดังนั้น ผลคูณของ 98×97 คือ 9506

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ 89×81

วิธีทำ $\overset{-11}{89} \times \overset{-19}{81} = 7\underset{2}{0} / 09$

$= 72 / 09$

$= 7209$

ดังนั้น ผลคูณของ 89×81 คือ 7209

ข้อสังเกต

ผลคูณของค่าเบี่ยงฐานที่มีตัวตั้งและตัวคูณเบี่ยงจากฐาน 100 คำตอบของส่วนหลังต้องมี 2 ตำแหน่ง แต่จากตัวอย่างนี้ ผลคูณของค่าเบี่ยงฐานเป็น 209 ให้เขียนแทนด้วย ${}_{2}09$ (ค่าเบี่ยงฐานจาก 100) ดังนั้น 2 เป็นส่วนที่ต้องทดไปบวกกับส่วนข้างหน้าคือ $70+2=72$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของ 92×196

วิธีทำ พิจารณาโจทย์ข้อนี้ 196 สามารถใช้วิธีลดสัดส่วน เป็น $98=\frac{1}{2}(196)$

จะทำให้ 98 มีค่าใกล้เคียงฐาน 100

นั่นคือ $92\times196 = 92\times(2\times98) = 2\left(\overset{-08}{92} \times \overset{-02}{98}\right)$

$= 2(90/16)$

$= 2(9016) = 18032$

ดังนั้น ผลคูณของ 92×196 คือ 18032

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลคูณของ 568×998

วิธีทำ $\overset{-432}{568} \times \overset{-002}{998} = 566/864$

$= 566864$

ดังนั้น ผลคูณของ 568×998 คือ 566864

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลคูณของ 857×994

วิธีทำ $\overset{-143}{857} \times \overset{-006}{994} = 851 / 858$

$= 851858$

ดังนั้น ผลคูณของ 857×994 คือ 851858

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลคูณของ 58776×99998

วิธีทำ $\overset{-41224}{58776} \times \overset{-00002}{99998} = 58774 \ / \ (-00002)(-41224)$

$= 58774 \ / \ 82448$

$= 5877482448$

ดังนั้น ผลคูณของ 58776×99998 คือ 5877482448

พิสูจน์เชิงพีชคณิต

เนื่องจาก $(x-a)(x-b) = x^2 - ax - bx + ab = x(x-a-b) + ab$

$$\begin{array}{c} x-a\ /\ -a \\ \underline{x-b\ /\ -b} \\ \underline{\underline{(x-a)-b\ /\ (-a)(-b)}} \end{array}$$

หรือ

$$\begin{array}{c} x-a\ /\ -a \\ \underline{x-b\ /\ -b} \\ \underline{\underline{(x-b)-a\ /\ (-a)(-b)}} \end{array}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

1. 7×8
2. 9×6
3. 9×9
4. 7×7
5. 97×98
6. 78×98
7. 97×69
8. 97×99
9. 86×98
10. 88×88
11. 67×95
12. 96×98
13. 99×94
14. 86×97
15. 73×98
16. 99×98
17. 88×96
18. 997×998
19. 937×998
20. 897×996
21. 887×998
22. 989×993
23. 888×998
24. 878×998

25. 797×996

26. 996×997

27. 999×999

28. 909×998

29. 7897×9996

30. 8987×9997

31. 9988×9996

32. 8989×9991

33. 9876×9995

34. 87798×99995

35. 99899×99993

36. 999998×999908

37. 67895×99998

38 9111×9900

39. 77799×88899

40. 99989×88899

6.2 การคูณโดยการเบี่ยงฐาน กรณีตัวคูณทั้งสองมากกว่าฐาน (NUMBERS ABOVE A BASE)

การดำเนินการคูณในกรณีนี้ยังใช้วิธีการเหมือนเดิม แต่ค่าเบี่ยงฐานจะมีค่าเป็นบวก

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 12×13

วิธีทำ $\overset{2}{12} \times \overset{3}{13} = 15 / 6$

$= 156$

ดังนั้น ผลคูณของ 12×13 คือ 156

หลักการคิด

ค่าเบี่ยงฐานของ 12 คือ 2 และ ค่าเบี่ยงฐานของ 13 คือ 3

ส่วนแรกของคำตอบคือ $12 + 3 = 15$ หรือ $13 + 2 = 15$

ส่วนหลังของคำตอบคือ $(2) \times (3) = 6$

ผลลัพธ์ที่เกิดจากการคูณ คือ 156

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 103×104

วิธีทำ $\overset{03}{103} \times \overset{04}{104} = 107 / 12$

$= 10712$

ดังนั้น ผลคูณของ 103×104 คือ 10712

หลักการคิด

ค่าเบี่ยงฐานของ 103 คือ 03 และ ค่าเบี่ยงฐานของ 104 คือ 04

ส่วนแรกของคำตอบคือ $103+04=107$ หรือ $104+03=107$

ส่วนหลังของคำตอบคือ $(03)\times(04)=12$

ผลลัพธ์ที่เกิดจากการคูณ คือ 10712

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 1234×1003

วิธีทำ $\overset{234}{1234} \times \overset{003}{1003} = 1237\ /\ 702$

$= 1237702$

ดังนั้น ผลคูณของ 1234×1003 คือ 1237702

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ 10021×10002

วิธีทำ $\overset{0021}{10021} \times \overset{0002}{10002} = 10023\ /\ 0042$

$=100230042$

ดังนั้น ผลคูณของ 10021×10002 คือ 100230042

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของ 1050×1089

วิธีทำ $\overset{050}{1050} \times \overset{089}{1089} = 1139\ /\ (050)(089)$

$=113\underset{4}{9}\ /\ 450$

$=1143\ /\ 450$

$=1143450$

ดังนั้น ผลคูณของ 1050×1089 คือ 1143450

ข้อสังเกต

ผลคูณของค่าเบี่ยงฐานต้องมี 3 ตำแหน่ง แต่จากตัวอย่างนี้ ผลคูณของค่าเบี่ยงฐานเป็น 4450 ให้เขียนแทนด้วย ${}_{4}450$ (ค่าเบี่ยงฐานจาก 1000)

ดังนั้น 4 เป็นส่วนที่ต้องทดไปบวกกับส่วนข้างหน้าคือ $1139+4=1143$

พิสูจน์เชิงพีชคณิต

เนื่องจาก $(x+a)(x+b) = x^2+ax+bx+ab = x(x+a+b)+ab$

$$\begin{array}{r} x+a\,/\;a \\ \underline{x+b\,/\;b} \\ \underline{\underline{(x+a)+b\,/\,ab}} \end{array}$$

หรือ

$$\begin{array}{r} x+a\,/\;a \\ \underline{x+b\,/\;b} \\ \underline{\underline{(x+b)+a\,/\,ab}} \end{array}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

1. 12×13
2. 13×11
3. 14×13
4. 14×15
5. 104×106
6. 108×111
7. 141×103
8. 112×113
9. 105×107
10. 118×118
11. 111×102
12. 123×104
13. 1224×1006
14. 1013×1011
15. 1122×1006
16. 1324×1007
17. 13923×10009
18. 1011×1898
19. 10097×10083
20. 1099×1086
21. 11087×11079
22. 10989×10007
23. 1808×1010
24. 11087×10009

6.3 การคูณโดยการเบี่ยงฐาน กรณีตัวคูณตัวหนึ่งมากกว่าฐานและตัวหนึ่งน้อยกว่าฐาน (ONE NUMBER ABOVE AND ONE NUMBER BELOW THE BASE)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 124×98

วิธีทำ

$$\overset{24}{124} \times \overset{-02}{98} = 122 \ / \ (24)(-02)$$

$$= 122 \ / \ \overline{48}$$

$$= 12\underset{\bar{1}}{2} \ / \ 52$$

$$= 121 \ / \ 52$$

$$= 12152$$

ดังนั้น ผลคูณของ 124×98 คือ 12152

ข้อสังเกต

1. ส่วนหลังของคำตอบคือ $(24) \times (-02) = -48$ เขียนแทนด้วย $\overline{48}$
2. เนื่องจากผลคูณของค่าเบี่ยงฐานมีค่า คือ $\overline{48}$ เราทำให้ส่วนหลังของคำตอบมีค่าเป็นบวก จะได้ $\bar{1}52$
3. ผลคูณของค่าเบี่ยงฐานต้องมี 2 ตำแหน่ง ให้เขียนแทนด้วย ${}_{\bar{1}}52$ (ค่าเบี่ยงฐานจาก 100) ดังนั้น $\bar{1}$ เป็นส่วนเกินที่ต้องทดไปบวกกับส่วนข้างหน้าคือ $122 + \bar{1} = 121$
4. ผลลัพธ์ที่เกิดจากการคูณ คือ 12152

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 1003×987

วิธีทำ

$$\overset{003}{1003} \times \overset{-013}{987} = 990 \ / \ \overline{039}$$

$$= 99\underset{\bar{1}}{0} \ / \ 961$$

$$= 989 \ / \ 961$$

$$= 989961$$

ดังนั้น ผลคูณของ 1003×987 คือ 989961

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 121×91

วิธีทำ $\overset{21}{121}\times\overset{-09}{91}=11\underset{1}{\underline{\underline{2}}}\ /\ \overline{89}$

$=11\underset{2}{\underline{\underline{2}}}\ /\ 11$

$=110\ /\ 11$

$=11011$

ดังนั้น ผลคูณของ 121×91 คือ 11011

พิสูจน์เชิงพีชคณิต

เนื่องจาก $(x-a)(x+b)=x^2-ax+bx+(-a)(b)=x(x-a+b)+(-ab)$

$$\begin{array}{c} x-a\ /\ -a \\ \underline{x+b\ /\ \ \ b} \\ \underline{\underline{(x-a)+b\ /\ (-ab)}} \end{array} \quad \text{หรือ} \quad \begin{array}{c} x-a\ /\ -a \\ \underline{x+b\ /\ \ \ b} \\ \underline{\underline{(x+b)-a\ /\ (-ab)}} \end{array}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 3

1. 12×9
2. 13×8
3. 14×7
4. 9×15
5. 97×106
6. 108×98
7. 141×97
8. 162×99
9. 105×93
10. 101×88
11. 111×98
12. 123×97
13. 1224×996
14. 1013×997
15. 1122×986
16. 889×1007
17. 10003×9889
18. 1111×999
19. 10007×9997
20. 1015×916
21. 1127×993
22. 10009×9993
23. 1235×999
24. 11087×9968

6.4 การนำสมบัติของเรื่องสัดส่วนมาช่วยการคำนวณการคูณเบี่ยงฐาน

จากผลคูณจำนวนสองจำนวนโดยวิธีเบี่ยงฐาน ที่มีค่าใกล้ฐาน $10,100,1000,...,10^n$ อาจมีบางกรณีที่จำนวนทั้งสองมีค่าใกล้เคียงฐานอื่นในรูป $10k, 100k, 1000k,...$ เมื่อ k เป็นจำนวนนับ เช่น 213×203 จะมีค่าใกล้เคียงฐาน 200 เป็นต้น แต่เมื่อฐานคือ 200 ซึ่งเกิดจาก 100×2 เราจึงคูณส่วนทางซ้ายของคำตอบด้วย 2 มีวิธีหาผลคูณโดยการเบี่ยงฐานดังนี้

ตัวอย่างที่ 1. $213\times 203 = 2\overset{1}{1}\overset{3}{3}\times 2\overset{0}{0}\overset{3}{3} = 2\left(216\right)/39 = 432/39 = 43239$

ตัวอย่างที่ 2. $\overset{-1}{29} \times \overset{-2}{28} = 3(27/2) = 81/2 = 812$

โจทย์ข้อนี้เราใช้ฐาน $30=(3\times 10)$ เราจึงคูณส่วนทางซ้ายของคำตอบด้วย 3

พิสูจน์เชิงพีชคณิต

เนื่องจาก $(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x(x+a+b)+ab$

ถ้า $x=10$ แล้ว $(10+a)(10+b)=10(10+a+b)+ab$

$=10((10+a)+b)+ab$

หรือ $=10((10+b)+a)+ab$

ถ้า $x=100$ แล้ว $(100+a)(100+b)=100(100+a+b)+ab$

ถ้า $x=200$ แล้ว $(200+a)(200+b)=200(200+a+b)+ab$

$=2\ (100)\ \underbrace{(10}_{\text{หลักร้อย}}+a+b)+ab$

ตัวอย่างที่ 3. $311\times 298 = 3\overset{1}{1}\overset{1}{1}\times 2\overset{-0}{9}\overset{2}{8} = 3\left(309\right)/\overline{22} = 927/\bar{1}78 = 926 = 92678$

โจทย์ข้อนี้เราใช้ฐาน $300=(3\times 100)$ และค่าต่างฐาน คือ $11,-02$

$\therefore 311+(-02)=298+(11)=309$ และ $(-02)\times(11)=-22=\overline{22}$

พิจารณาสองจำนวนที่คูณกันข้างต้น มากกว่าและน้อยกว่า 300 เราจะต้องคูณผลลัพธ์ทางซ้ายมือด้วย 3 แล้วบวกด้วย -1 เนื่องจากผลลัพธ์ทางขวามือเป็นจำนวนลบเกิน 2 ตำแหน่งตามสมบัติข้างต้น
ดังนั้น การใช้เรื่องสัดส่วนใน**การเพิ่มหรือลดค่าของสองจำนวนที่หาผลคูณ** ซึ่งจะต้องเพิ่มขั้นตอนในการหาผลส่วนทางซ้ายของคำตอบ

โดยวิธีอุปนัย เมื่อกำหนด $\mathbf{x}$ เป็นจำนวน $10, 100, 1000, \ldots$

$\mathbf{k}$ เป็นจำนวน 1 , 2 , 3 , 4 , ...

$$\left(kx+a\right)\left(kx+b\right) = k^2x^2+akx+bkx+ab$$
$$= kx\left(kx+a+b\right) + ab$$

ตัวอย่างที่ 4. $88 \times 49 = 88 \times \frac{1}{2}(98) = \frac{1}{2}\left(88 \times 98\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\overset{-12}{88} \times \overset{-02}{98}\right) = \frac{1}{2}\left(86/24\right) = \frac{1}{2}\left(8624\right) = 4312$$

ตัวอย่าง นี้เมื่อเราพิจารณา สองจำนวนที่จะหาผลคูณต่างฐานกัน แต่พอจะใช้เรื่องการเพิ่มสัดส่วนของจำนวนหลัง 49 เพิ่มสัดส่วนโดยการคูณ 2 แต่การเพิ่มเข้าต้องลดออก ดังนั้น $49 = \frac{1}{2}\left(98\right)$

แบบฝึกหัดชุดที่ 4 จงหาผลคูณของสองจำนวนต่อไปนี้

1. 42×43
2. 61×63
3. 39×38
4. 32×31
5. 71×74
6. 39×37
7. 67×69
8. 72×63
9. 203×207
10. 306×301
11. 288×296
12. 517×491
13. 499×501
14. 202×208
15. 303×299
16. 507×497
17. 8004×8012
18. 3999×3999
19. 7007×6998
20. 3012×3002
21. 6999×6998
22. 3123×2998
23. 5012×5003
24. 212×188
25. 598×389
26. 1996×198
27. 248×247
28. 2102×1808

6.5 การดำเนินการคูณแบบนิขิลัมสูตรในกรณีตัวคูณทั้งสองต่างฐานกัน (NUMBERS NEAR DIFFERENT BASE)

ตัวอย่างที่ 1. $9998 \times 94 = \overset{-0002}{9998} \times \overset{-06}{94} = 9398/12 = 939812$

พิจารณาตัวอย่างนี้พบว่าจำนวนทั้งสองนี้มีค่าใกล้ฐานต่างกันคือ :

9998 มีค่าใกล้ฐาน 10000 แต่ 94 มีค่าใกล้ฐาน 100

และคำตอบแบ่งออกเป็นสองส่วน คือ 9398 และ 12

ส่วนแรกของคำตอบ เป็นผลบวกของค่าเบี่ยงฐาน -06 กับตัวตั้ง 9998 (ตัวแรกของการคูณ) โดยกำหนดตำแหน่งการบวกดังแสดงผลข้างล่างนี้:

$$\begin{matrix} 9998 & & 1000\bar{2} \\ & \text{หรือ} & \\ 94 & & 10\bar{6} \end{matrix}$$

นำค่าเบี่ยงฐาน -06 ไปบวกกับ 9998 ตรงหลักที่ท้ายสุดของ (94) คือจำนวนที่ใกล้ฐาน (100) ที่น้อยกว่า ในนี้คือหลักที่ 2 จากทางซ้ายมือ ดังนั้น 9998 จะเป็น 9398 เป็นส่วนทางซ้ายของคำตอบ

แล้วส่วนทางขวาของคำตอบคงหาจากผลคูณของค่าเบี่ยงฐาน ทั้งสองคือ $(-0002) \times (-06) = 12$

ข้อสังเกต จำนวนตัวเลขโดดของทางซ้ายของคำตอบต้องสอดคล้องเท่ากับจำนวนตัวเลขโดดของจำนวนที่น้อยหรือจำนวนเลข 0 ของฐานที่กว่าของสองจำนวนที่คูณกันนั้น(98 มีค่าใกล้เคียง 100 ดังนั้นจะต้องมีเลขโดดตัวทางขวามือของคำตอบ)

ตัวอย่างที่ 2. $10007 \times 10037 = \overset{0007}{10007} \times \overset{003}{1003} = 10037/021 = 10037021$

เขียนจำนวนทั้งสองขนานตามแนวนอน : 10007 1003 จะพบว่าค่าเบี่ยงฐาน 003 จะบวกตรงตำแหน่งที่ 4 ตามแนวตั้งของข้างบนได้คำตอบทางขวามือคือ 10037

ส่วนผลคูณค่าเบี่ยงฐาน ทั้งสองคือ $0007 \times 003 = 21$ แต่ฐานของจำนวนน้อยในจำนวนที่คูณกันคือฐาน 1000 นั่นคือเราต้องการตัวเลขโดดของคำตอบทาขวามือ 3 ตัวคือ 021 คำตอบ 10037021

ตัวอย่างที่ 3. $\overset{032}{1032} \times \overset{-02}{98} = 1012/\overline{64} = 1012/\bar{1}36 = 101136$

ข้อสังเกต เนื่องจาก $98 = 10\bar{2}$ ค่าต่างฐาน -02 จะไปบวกกับ 3 ของ 1037 ได้ผลลัพธ์ 1012 เป็นคำตอบทาซ้ายมือ

แบบฝึกหัดชุดที่ 5

1. 9×97
2. 997×96
3. 1031×101
4. 998×94
5. 988×88
6. 1018×104
7. 1041×101
8. 1002×107
9. 1015×107
10. 1006×99
11. 1055×96
12. 9996×97
13. 9876×96
14. 1013×104
15. 10007×102
16. 10101×101
17. 10007×98
18. 11011×993
19. 99996×102
20. 9988×1011
21. 27×993
22. 10009×93
23. 100235×999
24. 11087×968

6.6 การดำเนินการคูณแบบนิขิลัมสูตร์ ในกรณีตัวคูณมีสามตัวพร้อมกัน

ตัวอย่างที่ 1. $\overset{-02}{98} \times \overset{-03}{97} \times \overset{-04}{96} = 91/26/\overline{24} = 912576$

พิจารณาตัวอย่างนี้พบว่าทั้งสามจำนวนมีค่าใกล้ฐาน 100 และมีค่าเบี่ยงฐาน คือ $-02, -03, -04$ คำตอบมี 3 ส่วน คั้นด้วย เครื่องหมาย /

ขั้นที่แรก นำตัวเลขตัวหนึ่งในสามจำนวนไปบวกกับค่าเบี่ยงฐาน ของอีกสองตัวที่เหลือคือ $98+(-3)+(-4)=91$ หรือ $97+(-2)+(-4)=91$ หรือ $96+(-2)+(-3)=91$ ซึ่งเป็นคำตอบส่วนแรก

ขั้นที่ 2 หาผลบวกของคูณแต่ละคู่ของค่าเบี่ยงฐาน ในเชิงการจัดหมู่(combinatoric) คือ

$$(-2\times-3)+(-2\times-4)+(-3\times-4)=26$$

ขั้นสุดท้าย ผลคูณทั้งสามของค่าเบี่ยงฐาน $-2\times-3\times-4=-24=\overline{24}$

ตัวอย่างที่ 2. $1022 \times 1002 \times 1003 = 1\overset{0}{0}\overset{2}{2}\overset{2}{2} \times 1\overset{0}{0}\overset{0}{0}\overset{2}{2} \times 1\overset{0}{0}\overset{0}{0}\overset{3}{2} = 10027/116/132 = 10027116132$

$1022+2+3=1027, 22\times2+22\times3+2\times3=116, 22\times2\times3=132$

แบบฝึกหัดชุดที่ 6

1. $8\times7\times6$
2. $97\times96\times99$
3. $93\times95\times98$
4. $88\times95\times96$
5. $995\times997\times999$
6. $985\times994\times996$
7. $984\times992\times994$
8. $1003\times1015\times1005$
9. $1011\times995\times1006$
10. $996\times997\times1003$
11. $13\times12\times9\times8$
12. $95\times97\times103\times105$
13. $9997\times9995\times9989\times1005$
14. $1013\times104\times988\times997$
15. $10007\times102\times1012\times119$

6.7 การหาค่ากำลังสองของจำนวนที่มีค่าใกล้เลขฐาน

วิธีการคำนวณกรณีนี้เป็นเทคนิคพิเศษที่ง่ายที่สุด ที่สามารถแสดงในรูปสูตรได้ และสามารถใช้สมบัติของสัดส่วนเพิ่มลดได้เช่นเดียวที่ได้ศึกษามาแล้ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้ :

ตัวอย่างที่ 1. $96^2 = \overset{-4}{96} \times \overset{-4}{96} = 96+(-4)/(-4)^2 = 92/16 = 9216$

วิธีคิด 96 มีค่าน้อยกว่า 100 มีค่าเบี่ยงฐาน ดังนั้น คำตอบส่วนแรก คือ $96+(-04)=92$ คำตอบส่วนสุดท้าย $(-4)^2=16$

ตัวอย่างที่ 2. $1006^2 = \left(\overset{006}{1006}\right)^2 = 1012/036$ `= 1012036

ข้อสังเกต คำตอบส่วนแรก 1006 บวกกับค่าเบี่ยงฐาน 006 เป็น 1012 และ $6^2=36$ แต่เนื่องจาจฐาน 1000 คำตอบทางขวาสุดต้องมี 3 ตำแหน่ง เราต้องเติม 0 เป็น 036 เป็น**คำตอบ**

ตัวอย่างที่ 3. $304^2 = 3\times 308/16 = 92416$

ตังอย่างก็เหมือนตัวอย่างที่แล้วเพียงแต่เป็นฐาน 300 ดังนั้น คำตอบส่วนทางซ้ายสุดต้องคูณด้วย 3 **ยิ่งไปกว่านั้นเรายังสามารถหาค่ากำลังสามของจำนวนที่มีค่าใกล้เลขฐานได้อีกด้วย**

ตัวอย่างที่ 4. $104^3 = 112/48/64$

วิธีคิด ส่วนซ้ายสุด ของคำตอบ เราเพิ่มสองเท่าของค่าที่เบี่ยงเกินฐาน คือ $104+8=112$

ส่วนกลาง สามเท่าของกำลังสองของค่าเบี่ยงฐาน $3\times 4^2=48$

ส่วนขวาสุด กำลังสามของค่าเบี่ยงฐาน $(4)^3=64$

พิสูจน์เชิงพีชคณิต

พิสูจน์ ให้ x เป็นเลขฐาน $(10,100,1000,\ldots)$ และ a เป็นค่าเบี่ยงฐาน

$$(x+a)^3 = x^2(x+3a)+3a^2x+a^3$$

ตัวอย่างที่ 5. $9989^3 = 9989+\overline{11}/3(\overline{11})^2/\overline{11}^3$

$$=9967/0363/\overline{1331}=996703628669$$

6.8 การหาค่ากำลังสองของจำนวนที่มีใกล้เคียง 50

อาจแบ่งได้ 2 กรณี คือ ค่ากำลังสองที่น้อยกว่า 50 หรือค่ากำลังสองที่มีค่ามากกว่า 50

ตัวอย่างที่ 1. $54^2 = 29/16$ ดังนั้นคำตอบคือ 2916

วิธีคิด เนื่องจาก $50^2 = 2500$ และเนื่องจาก 54 มากกว่า 50 อยู่ 4

เราจะได้ $25+4=29$ และ $4^2 = 16$

ข้อควรจำ $51^2 = 26/01$

$52^2 = 27/04$

$53^2 = 28/09$

$54^2 = 29/16$

$55^2 = 30/25$

$56^2 = 31/36$

$57^2 = 32/49$

$58^2 = 33/64$

$59^2 = 34/81$

ตัวอย่างที่ 2. $48^2 = \left(\overset{-2}{48}\right)^2 = 23/04$ ดังนั้นคำตอบคือ 2304

วิธีคิด $25-2=23$ (25 ตัวข้างหน้าบวกด้วยค่าเบี่ยงฐาน -2), $(-2)^2 = 4$ (กำลังสองของค่าเบี่ยงฐาน)

แบบฝึกหัดชุดที่ 7

กำลังสองของจำนวนใกล้ฐาน

1. 96^2 2. 93^2 3. 104^2

4. 111^2 5. 1004^2 6. 1006^2

7. 104^2 8. 113^2 9. 1013^2

10. 997^2 11. 987^2 12. 9988^2

13.10103^2

14. 31^2

15. 42^2

16. 49^2

17. 204^2

18. 296^2

19.1998^2

20. 3988^2

21. 7007^2

22.103^2

23. 96^2

24. 95^2

กำลังสามของจำนวนใกล้ฐาน

25.1005^3

26.103^3

27. 95^3

28.1005^3

29. 12^3

30. 7007^3

31. 9988^3

32. 99^3

33. 302^3

34.198^3

35. 3997^3

36. 7007^3

7. การดำเนินการคูณด้วยตัวคูณเป็นเลขเก้าหรืออนุกรมของเลขเก้า

การคิดเลขด้วยวิธีเวทคณิต ใช้สูตร One Less Than the One Before ซึ่งเป็นวิธีผกผันหรือย้อนกลับกับวิธีที่กล่าวมาแล้ว และใช้ร่วมกับ วิธีทุกตัวทบเก้าแต่ตัวสุดท้ายทบสิบ และ**วิธีการนี้ใช้ได้เมื่อ จำนวนหลักของตัวคูณ เท่ากับหรือมากกว่าจำนวนหลักของตัวตั้ง**

กรณีที่ 1 จำนวนหลีกของตัวคูณเท่ากับจำนวนหลักของตัวตั้ง

ตัวอย่างที่ 1. จงหาผลคูณของ 763×999

วิธีคิด จำนวนแรกตัวตั้งจะลดลง 1 ส่วนจำนวนหลังตัวคูณเป็น เลข 9 หรืออนุกรมเลข 9 จึงสามารถนำของสมบัติ “ทุกตัวทบเก้าแต่ตัวสุดท้ายทบสิบ” ของตัวตั้ง

ดังนั้น จำนวนแรก 763 จะถูกลดลง 1 : $763-1=762$ เป็นคำตอบส่วนแรก คำตอบส่วนหลังเป็นทุกตัวทบเก้าแต่ตัวสุดท้ายทบสิบของ 763

$763\times999=(763-1)/$ (ทุกตัวทบเก้าแต่ตัวสุดท้ายทบสิบของ 763)

$= 762/237$

พิสูจน์ $763\times999=763\times(1000-1)$

$=(763\times1000)-(763\times1)$

$=763000-763$

$=(762000+1000)-763$

$=762000+(1000-763)$

$=762000+237=762/237=762237$

หรือ $763\times999=763\times(1000-1)$

$=763000-763$

$=763000-(1\overline{237})=763000-(1000-237)$

$=763000-(1000-237)=763000-1000+237$

$=762/237=762237$

กรณีที่ 2 จำนวนหลีกของตัวคูณมากกว่าจำนวนหลักของตัวตั้ง

ตัวอย่างที่ 2. $1867\times99999 =1866/98133$

วิธีคิด เนื่องจาก 1867 มี 4 หลัก และ 99999 มี 5 หลัก เราต้องปรับ 1867 ให้มี 4 หลักเท่ากัน เป็น 01867 แล้ว คำตอบทางขวามือคือ $1867-1=1866$ และคำตอบทางขวามือ ใช้วิธีการทุกตัวทบเก้าแต่ตัวสุดท้ายทบสิบกับ 01867 คือ 98133

ดังนั้น $1867\times99999=(1867-1)/$ (ทุกตัวทบเก้าแต่ตัวสุดท้ายทบสิบของ 01867)

$= 1866/98133 =186698133$

พิสูจน์ $1876 \times 99999 = 1876 \times (100000 - 1)$

$$
\begin{aligned}
&= (1867 \times 100000) - (1867 \times 1) \\
&= 186700000 - 1867 \quad = 186700000 + (\bar{2}133) \\
&= (186700000 - 2000) + 133 \\
&= 186698000 + 133 = (1867 - 1) / 98133
\end{aligned}
$$

ซึ่ง 98133 ได้จากทุกตัวทบเก้าแต่ตัวสุดท้ายทบสิบของ 01867

แบบฝึกหัดชุดที่ 8

1. 63×99
2. 88×99
3. 42×99
4. 678×999
5. 2137×9999
6. 34×999
7. 76×999
8. 864×9999
9. 28×9999
10. 909×99999
11. 3488×99
12. 6789×99
13. 9032×99
14. 3488×99
15. 939×99
16. 364×999
11. 8998×99
12. 99999×99

8. การตรวจสอบคำตอบด้วยวิธี การคูณตัวแรกด้วยตัวแรกและตัวหลังด้วยตัวหลัง

(THE FIRST BY THE FIRRT AND THE LAST BY THE LAST)

เป็นเทคนิควิธีประมาณค่าของคำตอบและตรวจสอบคำตอบว่าใกลเคียงหรือคำตอบถูกต้องหรือไม่ ซึ่งจะทำให้การคิดเลขมีประสิทธิภาพมากขึ้น เทคนิคนี้มีการตรวจสอบด้วยกัน 3 ขั้นตอน ดังนี้ :

การตรวจสอบขั้นตอนที่ 1 (Check 1: The first by the first)

การตรวจสอบคำตอบด้วยตัวเลขตัวหน้ากับตัวเลขตัวหน้า

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ 32×41

วิธีคิด **เริ่มแรก** เราประมาณค่าได้ 1200 โดยการหาผลคูณตัวหน้าด้วยตัวหน้า เราคาดว่า

ค่าของ 32×41 โดยประมาณจาก 30×40 ซึ่งได้ 1200

และ เราพอประมาณได้ว่า 32×41 มากว่า 1200 เล็กน้อย เพราะว่า 32 และ 41 ทั้งสองมากกว่า 30 และ 40

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ 641×82

วิธีคิด เราพอประมาณค่าผลคูณได้ 50000 เพราะว่า $600 \times 80 = 48000$

และเราก็พอรู้ว่าคำตอบเกิน 50000 เนื่องจาก $(600 \times 80) + (40 \times 2)$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ 383×887

วิธีคิด 383×887 มีค่าประมาณ $360,000$ เพราะว่า $400 \times 900 = 360,000$

และเราก็พอรู้ว่าคำตอบต้องน้อยกว่านี้ เพราะว่า 400 และ 900 มากกว่า 383 และ 887

การตรวจสอบขั้นตอนที่ 2 (Check 2: The last by the last)

การตรวจสอบคำตอบด้วยตัวเลขตัวหลังกับตัวเลขตัวหลัง

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลคูณของ 72×83

วิธีคิด เราประมาณค่าได้ว่าคำตอบต้องลงท้ายด้วยเลข 6 โดยการหาผลคูณตัวหลังด้วยตัวหลังของเลขสองจำนวนนั้น

72×83 ตัวเลขตัวหลังของ 72 คือ 2 และตัวเลขตัวหลังของ 83 คือ 3 ดังนั้นคำตอบของผลคูณต้องลงท้ายด้วย 6 $(2 \times 3 = 6)$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของ 383×887

วิธีคิด ประมาณค่าได้ว่าคำตอบต้องลงท้ายด้วยเลข 1 เพราะว่าตัวเลขลงท้ายของ 383 คือ 3 และ ตัวเลขลงท้ายของ 887 คือ 7 ดังนั้นคำตอบของผล คูณต้องลงท้ายด้วย 1 $(3 \times 7 = 21)$

การตรวจสอบขั้นตอนที่ 3 (Check3:The Digit Sum Check)

การตรวจสอบคำตอบด้วยหาผลบวกของตัวเลขโดดในคำตอบนั้น เป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์มากในเทคนิควิธีของเวทคณิตภายใต้ **สูตรที่ 15** ของเวทคณิตกล่าวไว้ว่า “ผลลัพธ์ของการกระทำบวกเท่ากับการกระทำบวกของผลลัพธ์ (The product of the sum is equal to the sum of the product) ’’ กล่าวคือจำนวนเต็มบวกทุก ๆ จำนวนไม่ว่าจะมีกี่หลักก็ตามสามารถลดรูปโดยการบวกตัวเลขโดด (digit sum) ซ้ำ ๆ เป็นตัวเลขตัวเพียงเดียวได้ เช่น 43 มีผลบวกเลขโดดคือ 7 เมื่อ $4+3=7$ เช่นเดียวกัน $47, 4+7=11$ แล้วหาผลบวกต่อ $11,1+1=2$ ดังนั้น ผลบวกเลขโดดของ 47 คือ 2 หรือ $876, 8+7+6=21 \rightarrow 21,\ 2+1=3$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดผลคูณของ $74 \times 76 = 5624$ จงตรวจสอบว่าผลเฉลยถูกต้อง

วิธีคิด เราสามารถลดรูปเป็นผลบวกเลขโดดของแต่ละจำนวนคือ 74, 76 และ 5624 เป็นดังนี้

$$74 \rightarrow 7+4=11 \rightarrow 1+1=2$$

$$76 \rightarrow 7+6=13 \rightarrow 1+3=4$$

$$5624 \rightarrow 5+6+2+4=17 \rightarrow 1+7=8$$

หาผลคูณของ $2 \times 4 = 8$ ผลบวกของเลขโดดของ 8 ก็ได้ 8 ต่อมาผลบวกเลขโดดของ 5624 ซึ่งเท่ากันเป็นการยืนยันว่าการหาผลคูณครั้งนี้ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 7. กำหนดผลคูณของ $88 \times 77 = 6776$ (พาลินโดรม) จงตรวจสอบว่าผลเฉลยถูกต้อง

วิธีทำ หาผลบวกเลขโดดของ 88 และ 77 ได้ 7 กับ 5 แล้วหาผลบวกเลขโดดของผลคูณ $7 \times 5 = 35$ คือ $3+5=8$ ตอมหาผลบวกเลขโดดของคำตอบ $6776 \rightarrow 6+7+7+6=26 \rightarrow 2+6=8$ สรุปได้ว่าผลเฉลยนั้นถูกต้อง

หมายเหตุ

การตรวจสอบโดยการหาผลบวกของเลขโดดของคำตอบอาจคลาดเคลื่อนถ้ามีการเขียนตำตอบสลับที่กันของคำตอบบ้าง เช่น $88+77=165$ แต่กลับไปเขียนเป็น $88+77=156$ ผลการหาผลบวกเลขโดดของคำตอบมีค่าเท่ากับแต่สลับตำแหน่ง เช่นนี้ควรตรวจสอบหาผลตัวท้ายสุดทั้งคู่ ซึ่งตัวท้ายสุดบวกกันต้องลงท้ายด้วย 5

แบบฝึกหัดชุดที่ 8

จงหาผลคูณของสองจำนวนต่อไปนี้

1. 63×99
2. 88×99
3. 42×99
4. 678×999
5. 2137×999
6. 34×999
7. 76×999
8. 864×9999
9. 28×9999
10. 909×99999
11. 3488×99
12. 6789×99
13. 9032×99
14. 3488×99
15. 939×99
16. 364×999
17. 8998×99
18. 99999×99

บทนำ

ในวิชาเลขคณิต (arithmetic) การหารแบบยุคลิด (Euclidean division) เป็นการหารของจำนวนสองจำนวน ประกอบด้วย ตัวตั้ง (dividend) ตัวหาร (divisor) แล้วได้ผลหาร (quotient) และเศษเหลือ (remainder) ทฤษฎีบทนี้กล่าวถึงผลลัพธ์จากการหารของจำนวนเต็มปกติไว้อย่างเที่ยงตรง ที่สำคัญทฤษฎีนี้ยืนยันว่าจำนวนเต็มที่เรียกว่าผลหาร q และเศษ r มีอยู่เสมอและมีเพียงค่าเดียวสำหรับตัวตั้ง a และตัวหาร d โดยที่ $d \neq 0$ ทฤษฎีกล่าวไว้ดังนี้ “ มีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียวที่ $a = dq + r$ และ $0 \leq r < |d|$ไข”

ในบทนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการหารแบบเวทคณิตมี 3 เรื่อง คือการหารตรง การหารด้วยเทคนิคเฉพาะ และการโดยใช้เศษส่วนช่วย ซึ่งแต่ละเรื่องมีรายละเอียด ดังนี้

1. เกริ่นนำ
2. การดำเนินการหารตรง (Dhvajanka Sutra)
    2.1 การหารกรณีตัวหารเป็นจำนวนเต็มหนึ่งหลัก
    2.2 การหารกรณีตัวหารเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่สองหลักขึ้นไป
3.การหารแบบเทคนิคเฉพาะ
    3.1. การดำเนินการหารโดยวิธีนิขิลัม (Nikhilam Method)
    3.2 การดำเนินการหารโดยวิธีปราวรรตย (Paravartya Method)
    3.3 การดำเนินการหารโดยวิธีเพิ่มหรือลดสัดส่วน (อนุรูปเยณ = Anurupyena Method)
    3.4 การดำเนินการหารโดยวิธีการวินคิวลัม (Vinculum Process of Division)
4. การดำเนินการหารด้วยเศษส่วนช่วย (Auxiliary Fractions)
    4.1 เศษส่วนช่วยแบบที่ 1

1. เกรินนำ

การหารในเวทคณิตมีรูปแบบทั่วไปหรือรูปแบบเฉพาะ เช่นเดียวกับการคูณ รูปแบบเฉพาะจะใช้ได้ก็ต่อเมื่อจำนวนที่หารกันจะต้องอยู่ในเงื่อนไขเฉพาะ เช่น ตัวหารจะต้องน้อยกว่าหรือมากกว่าและมีค่าใกล้เคียงกับ 100 หรือตัวหารที่เป็นกำลังของ 10 หรือตัวหารที่ลงท้ายด้วยเลข 9 เป็นต้น ส่วนรูปแบบทั่วไปใช้กับการหารได้ทุกจำนวน ดังนั้นการหารจึงขึ้นอยู่กับตัวตั้งและตัวหาร ในวิธีการหารทางเวทคณิตสามารถจำแนกตามสูตรได้ดังนี้

1. การหารตรง (Dhvajanka Sutra = Vertically and crosswise and on the top of the flag)
2. นิขิลัมสูตร (Nikhilam Sutra) เป็นเทคนิคเฉพาะ
3. ปราวรรตยสูตร (Paravartya Sutra) เป็นเทคนิคเฉพาะ
4. อนุรูปเยณสูตร (Anurupyena Sutra) เป็นเทคนิคเฉพาะ
5. วินคิวลัม (Vinculum Process of Division) เป็นเทคนิคเฉพาะ
6. เอกาธิเกนปุรเวณ (Ekadhikena Purvena) เป็นเทคนิคเฉพาะ
7. เวษฏนัม (Vestanas) เป็นเทคนิคทั่วไป

2. การดำเนินการหารตรง (Dhvajanka Sutra)

การหารตรงเป็นการหารแบบทั่วไปโดยการสังเคราะห์ของวิธีเวทคณิตที่รวดเร็ว ได้พัฒนาโดยใช้เทคนิคแนวตรงและแนวไขว้ (Vertically and Cross-wise and on the top of the flag) หรือเป็นการหารโดยใช้การหารตรง (Dhvajanka Sutra) ท่านสังฆราช ภารติ กฤษณะ ติรถะ (Sankaracarya Bharati Krsna Tirthaji พ.ศ. 2427-2503) เรียกวิธีการหารนี้ว่า **อัญมณีอันล้ำค่าของเวทคณิต ''Crowning Gem of Vedic Mathematics''** เพราะสามารถดำเนินการหารที่ตัวตั้งและตัวหารได้ทุกจำนวน จึงควรที่จะศึกษาอย่างยิ่ง

การหาร ประกอบด้วย ตัวตั้ง (dividend) ตัวหาร (divisor) ผลหาร (quotient) และเศษเหลือ (remainder)
ตัวอย่างเช่น $19 \div 6 = 3,$ เศษเหลือ 1

$(19 = 6 \times 3 + 1)$, 19 เป็นตัวตั้ง, 6 เป็นตัวหาร, 3 เป็นผลหาร และ 1 เป็นเศษเหลือ

2.1 การหารกรณีตัวหารเป็นจำนวนเต็มหนึ่งหลัก

การหารตรงให้เขียนตัวตั้งแล้วเขียนเส้นกำกับจากทางซ้ายไปทางขวา เว้นช่องว่างระหว่างตัวเลขของตัวตั้งไว้พอสมควรสำหรับใส่เศษเหลือห้อยไว้หน้าตัวเลขถัดไป ซึ่งจะเป็นตัวตั้งในการหารขั้นตอนต่อไป

<table>
<tr>
<td>ตัวอย่างที่ 1 $671 \div 4$
วิธีทำ
$$\begin{array}{r|lll|l} 4 & 6 & {}_{2}7 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$</td>
<td>ขั้นตอนการหาร
ขั้นที่ 1 $6 \div 4 = 1$ เหลือเศษ 2
เขียน 2 ห้อยข้างหน้า 7 ซึ่งเป็นตัวเลขหลักถัดไปของเลข 6 จะได้ตัวตั้งในการหารขั้นต่อไปคือ 27</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\begin{array}{r|lll|l} 4 & 6 & {}_{2}7 & {}_{3}1 & 0 \\ \hline & 1 & 6 & & \end{array}$$</td>
<td>ขั้นที่ 2 $27 \div 4 = 6$ เหลือเศษ 3
เขียน 3 ห้อยข้างหน้าเลข 1 ซึ่งเป็นตัวเลขถัดไปของเลข 7 จะได้ตัวตั้งในการหารขั้นต่อไปคือ 31</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\begin{array}{r|lll|l} 4 & 6 & {}_{2}7 & {}_{3}1 & {}_{3}0 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & \end{array}$$
ตอบ $167\frac{3}{4}$</td>
<td>ขั้นที่ 3 $31 \div 4 = 7$ เหลือเศษ 3 ซึ่งเป็นเศษเหลือในการหาร
คำตอบ คือ $167\frac{3}{4}$</td>
</tr>
</table>

ถ้าต้องการผลลัพธ์เป็นทศนิยม ให้ดำเนินการหารต่อ ดังนี้

$\begin{array}{c\|ccc\|ccc} 4 & 6 & {}_{2}7 & {}_{3}1 & {}_{3}0 & {}_{2}0 & 0 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & 7 & & \end{array}$	**ขั้นที่ 4** เขียน 3 ห้อยข้างหน้า 0 ซึ่งเป็นตัวเลขถัดไปของเลข 1 จะได้ตัวตั้งในการหารขั้นต่อไปคือ 30 ของส่วนที่เป็นทศนิยม $30 \div 4 = 7$ เหลือเศษ 2 เขียน 2 ห้อยข้างหน้าเลข 0 ซึ่งเป็นตัวเลขถัดไปของเลข 0 จะได้ตัวตั้งในการหารขั้นต่อไปคือ 20
$\begin{array}{c\|ccc\|ccc} 4 & 6 & {}_{2}7 & {}_{3}1 & {}_{3}0 & {}_{2}0 & {}_{0}0 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & 7 & 5 & \end{array}$ **คำตอบคือ** 167.75	**ขั้นที่ 5** $20 \div 4 = 5$ เหลือเศษ 0 แสดงว่าเป็นการสิ้นสุดการหาร คำตอบ คือ 167.75

วิธีเขียนการหารแบบตรงสรุปได้ดังนี้

$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 6 & {}_{2}7 & {}_{3}1 & {}_{3}0 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & 3 \end{array}$ หรือ $\begin{array}{c|ccc|cc} 4 & 6 & {}_{2}7 & {}_{3}1 & {}_{3}0 & {}_{2}0 \\ \hline & 1 & 6 & 7 & 7 & 5 \end{array}$

ตอบ $167\frac{3}{4} = 167.75$

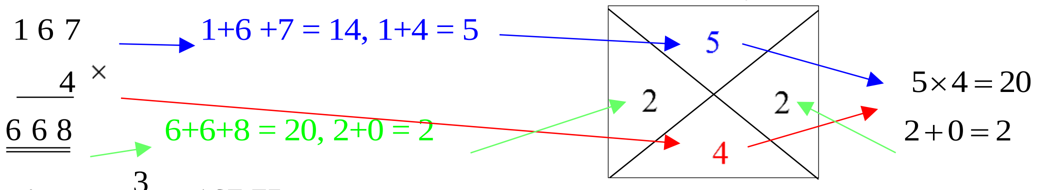
การตรวจสอบผลลัพธ์จากการดำเนินการหารสามารถใช้วิธีผลบวกเลขโดดของจำนวนนับ (สมบัติของวงกลมเก้าจุด) ได้ดังนี้

การตรวจสอบการดำเนินการหาร (Division Check)

ขั้นที่ 1 นำตัวตั้งลบด้วยเศษเหลือ 3 จะได้ $671 - 3 = 668$ ซึ่ง 668 หารด้วย 4 ลงตัว

ขั้นที่ 2 เมื่อพิจารณาการตรวจสอบว่าการหารถูกต้องหรือไม่ จากขั้นที่ 1 ให้ปรับเปลี่ยนการหาร เป็นการคูณระหว่างผลลัพธ์กับตัวหาร ดังนี้

ผลบวกเลขโดดของจำนวนนับ (สมบัติของวงกลมเก้าจุด)



หรือ $671 \div 4 = 167\frac{3}{4} = 167.75$

$1\,6\,7 + \frac{3}{4}$ $1+6+7+3 = 8$

×

$$\begin{array}{r} \hline 4 \\ \underline{\underline{6\ \ 7\ \ 1}} \end{array} \rightarrow 6+7+1=14,1+4=5 \qquad \begin{array}{r} \hline 4 \\ \hline 3\ \ 2 \end{array} \rightarrow 3+2=5$$

หรือ

$$\begin{array}{r} 167.75 \\ \underline{4} \\ \underline{\underline{6\ \ 7\ \ 1}} \end{array} \rightarrow 6+7+1=5 \qquad \begin{array}{r} 1+6+7+7+5=8 \\ \underline{4} \\ \underline{3\ \ 2} \end{array} \times \rightarrow 3+2=5$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์

1) $294 \div 3$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|ccc|cc} 3 & 2 & {}_{2}9 & {}_{2}4 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 9 & 8 & & \\ \hline \end{array}$$

ตอบ $294 \div 3 = 98\ \ 98$

2) $925 \div 8$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|ccc|ccc} 8 & 9 & {}_{1}2 & {}_{4}5 & {}_{5}0 & {}_{2}0 & {}_{4}0 \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 6 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

ตอบ $925 \div 8 = 115.625$

3) $3689 \div 7$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|cccc|cc} 7 & 3 & {}_{3}6 & {}_{1}8 & {}_{4}9 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 5 & 2 & 7 & & \\ \hline \end{array}$$

ตอบ $3689 \div 7 = 527$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

จงหาผลลัพธ์โดยให้คำตอบอยู่ในรูปผลหารและเศษเหลือ และทศนิยมสามตำแหน่ง

1. $3 \overline{)3\ \ 2\ \ 7}$ ________

2. $4 \overline{)3\ \ 1\ \ 3\ \ 4}$ ________

3. $6 \overline{)5\ \ 3\ \ 2\ \ 1}$ ________

4. $7 \overline{)6\ \ 8\ \ 2\ \ 1}$ ________

5. $4 \overline{)2\ \ 3\ \ 6\ \ 5\ \ 7}$ ________

6. $8 \overline{)5\ \ 7\ \ 3\ \ 2}$ ________

7. 5 | 5 7 4 4

____

8. 2 | 7 8 5 7 9

____

9. 4 | 4 8 4 3 6

____

10. 8 | 5 9 7 8 4 6 3 4

____

11. 9 | 9 8 9 7 9 7 9

____

12. 5 | 9 4 9 5 6 8 9 3 2 1

____

13. 6 | 6 9 6 9 6 9 6 9 6 9 6 9 6 9 6 9

____

14. 3 | 3 4 5 6 7 8 9 3 4 5 6 7 8

____

15. 4 | 8 9 6 5 7 9 2 3

____

2.2 การหารกรณีตัวหารเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่สองหลักขึ้นไป

การหารตรงเป็นวิธีที่ใช้เทคนิคแนวตรงและแนวไขว้ โดยคิดที่ตัวเลขส่วนหนึ่งของตัวหาร ซึ่งมีข้อตกลงดังนี้

ตัวหาร ที่เป็นเลขสองหลักจะต้องแยกออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกเป็นตัวหาร เรียกว่า **ตัวหารใหม่** (new divisor) และส่วนที่สองเรียกว่า **ตัวธง** (**fla**g) ใช้เป็นตัวเสริมในการหาร

ตัวตั้ง แยกเป็นสองส่วนเช่นเดียวกับตัวหาร ซึ่งส่วนที่สองของตัวตั้งต้องมีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของตัวธง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $716769 \div 54$

ขั้นตอนการหาร(Division Algorithm)

ตัวอย่างนี้ตัวหาร 54 มีสองหลัก แยกตัวหาร 54 ออกเป็นสองส่วนคือ 5 กับ 4 ซึ่งการหาร จะใช้ส่วนแรก คือ 5 เป็นตัวหาร เรียกว่า ตัวหารใหม่ และส่วนที่สองคือ 4 เรียกว่า ตัวธง และตัวตั้งแบ่งเป็น สองส่วน คือ $7\,1\,6\,7\,6 \mid 9$ โดยส่วนที่สองของตัวตั้งจะต้องมีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของตัวธง การหารให้ดำเนินการ ดังนี้

วิธีทำ	ขั้นตอนการหาร
ขั้นที่ 1 $5^{4}\,|\,7 \quad {}_{2}1 \quad 6 \quad 7 \quad 6 \;\mid\; 9$ 1	**ขั้นที่ 1** $7 \div 5 = 1$ เหลือเศษ 2 ใส่ผลหาร 1 ซึ่งเป็นตัวแรกของคำตอบ ส่วนเศษ 2 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 1 ของตัวตั้งในการหารขั้นต่อไป คือ 21
ขั้นที่ 2 $5^{4}\,|\,7 \quad {}_{2}1 \quad {}_{2}6 \quad 7 \quad 6 \;\mid\; 9$ (4×1) $1 \quad 3$	**ขั้นที่ 2** หาผลคูณตัวธง 4 กับผลหาร 1 ที่ได้มาจากขั้นที่ 1 แล้วนำไปลบออกจากตัวเลขถัดไปของตัวตั้งข้างบนคือ 21 แล้วหารด้วย 5 ดังนี้ $21-4(1)=17,\ 17 \div 5 = 3$ เหลือเศษ 2 ใส่ผลลัพธ์ 3 เป็นตัวที่สองของคำตอบ ส่วนเศษ 2 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 6 ของตัวตั้งในการหารขั้นต่อไป คือ 26

ขั้นที่ 3 $5^{4}\,|\,7 \quad {}_{2}1 \quad {}_{2}6 \quad {}_{4}7 \quad 6 \;\mid\; 9$ $(4\times1) \quad (4\times3)$ $1 \quad 3 \quad 2$	**ขั้นที่ 3** ในทำนองเดียวกัน หาผลคูณระหว่างตัวธงกับผลหารที่ได้มาจากขั้นที่ 2 นำไปลบออกจากตัวตั้งถัดไปทางขวา แล้วหารตัวหารใหม่ $26-3(4)=14, 14 \div 5 = 2$ เหลือเศษ 4 ใส่ 2 เป็นตัวที่สามของคำตอบ ส่วนเศษ 4

	นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 7 ของตัวตั้งในการหาร ขั้นต่อไป คือ 47
ขั้นที่ 4 $5\ {}^{4}\big\vert\ 7\quad {}_{2}1\quad {}_{2}6\quad {}_{4}7\quad {}_{4}6\ \big\vert\ 9$ $(4\times1)\quad(4\times3)\quad(4\times2)$ $1\quad 3\quad 2\quad 7$	**ขั้นที่ 4** $47-2(4)=39$, $39\div5=7$ เหลือเศษ 4 ใส่ 7 เป็นตัวที่สี่ของคำตอบ ส่วนเศษ 4 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 6 ของตัวตั้งในการหารขั้นต่อไป คือ 46
ขั้นที่ 5 $5\ {}^{4}\big\vert\ 7\quad {}_{2}1\quad {}_{2}6\quad {}_{4}7\quad {}_{4}6\ \big\vert\ {}_{3}9$ $(4\times1)\quad(4\times3)\quad(4\times2)\quad(4\times7)$ $1\quad 3\quad 2\quad 7\quad 3$	**ขั้นที่ 5** $46-7(4)=18$, $18\div5=3$ เหลือเศษ 3 ใส่ 3 เป็นตัวที่ห้าของคำตอบ ส่วนเศษ 3 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 9 ของตัวตั้งในการหารขั้นต่อไป คือ 39
ขั้นที่ 6 $5\ {}^{4}\big\vert\ 7\quad {}_{2}1\quad {}_{2}6\quad {}_{4}7\quad {}_{4}6\ \big\vert\ {}_{3}9$ $(4\times1)\quad(4\times3)\quad(4\times2)\quad(4\times7)\ \big\vert\ (4\times3)$ $1\quad 3\quad 2\quad 7\quad 3\ \big\vert\ 27$ **ตอบ** $13273\frac{27}{54}=13273\frac{1}{2}$	**ขั้นที่ 6** หาเศษเหลือจากการหาร จะได้ $39-(4\times3)=27$ คำตอบ คือ $13273\frac{27}{54}=13273\frac{1}{2}$
ขั้นที่ 7 $5\ {}^{4}\big\vert\ 7\quad {}_{2}1\quad {}_{2}6\quad {}_{4}7\quad {}_{4}6\ \big\vert\ {}_{3}9\quad {}_{2}0$ $(4\times1)\quad(4\times3)\quad(4\times2)\quad(4\times7)\ \big\vert\ (4\times3)$ $1\quad 3\quad 2\quad 7\quad 3\ \big\vert\ 5$	การหารตั้งแต่ขั้นตอนนี้เป็นต้นไปจะเป็นส่วนของทศนิยม **ขั้นที่ 7** $39-3(4)=27$, $27\div5=5$ เหลือเศษ 2 ใส่ 5 เป็นตัวที่ 1 ของคำตอบทศนิยม ส่วนเศษ 2 นำไปเขียนห้อยไว้ข้างหน้าเลข 0 ซึ่งเป็นตัวตั้งถัดไป คือ 20

ขั้นที่ 8 $5\ {}^{4}\big\vert\ 7\quad {}_{2}1\quad {}_{2}6\quad {}_{4}7\quad {}_{4}6\ \big\vert\ {}_{3}9\quad {}_{2}0$ $(4\times1)\quad(4\times3)\quad(4\times2)\quad(4\times7)\ \big\vert\ (4\times3)\quad(4\times5)$ $1\quad 3\quad 2\quad 7\quad 3\ \big\vert\ 5\quad 0$ **ตอบ** 13273.5	**ขั้นที่ 8** $20-5(4)=0$ เป็นการสิ้นสุดการหาร คำตอบ คือ 13273.5

วิธีเขียนการหารแบบตรงสรุปได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|ccccc|c} 5\;^{4} & 7 & {}_{2}\overset{4}{1} & {}_{2}\overset{12}{6} & {}_{4}\overset{8}{7} & {}_{4}\overset{28}{6} & {}_{3}\overset{12}{9} \\ \hline & & 17 & 14 & 39 & 18 & \\ \hdashline & 1 & 3 & 2 & 7 & 3 & 27 = r \\ \hline \end{array}$$

ตอบ $13273\frac{27}{54} = 13273\frac{1}{2} = 13273.5$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $45026 \div 47$

ในตัวอย่างนี้แบ่งตัวหาร 47 เป็น 4 เป็นตัวหารใหม่และ 7 เป็นตัวธง

วิธีทำ	**ขั้นตอนการหาร**
ขั้นที่ 1 $\begin{array}{r\|cccc\|cc} 4\;^{7} & 4 & {}_{4}5 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ \hline & & & & & & \\ \hdashline & 0 & & & & & \\ \hline \end{array}$	**ขั้นที่ 1** $4 \div 4 = 0$ เหลือเศษ 4 ใส่ผลหาร 0 ซึ่งเป็นตัวแรกของคำตอบ ส่วนเศษ 4 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 5 ของตัวตั้ง เนื่องจาก $4 \div 4 = 1$ เหลือเศษ 0 จะทำให้ผลหารคือ 1 เมื่อนำไปคูณกับตัวธง คือ 7 แล้วนำไปลบกับตัวตั้งในหลักถัดไปทางขวา ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ติดลบ ดังนั้นจึงต้องลดผลหารเพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นบวก

<table>
<tr>
<td>ขั้นที่ 2
$$\begin{array}{c|cccc|cc} 4^{7} & 4 & {}_{4}\overset{0}{5} & {}_{9}0 & 2 & 6 & 0 \\ \cline{2-8} & & 45 & & & & \\ \cline{2-8} & 0 & 9 & & & & \\ \cline{2-8} \end{array}$$</td>
<td>ขั้นที่ 2 หาผลคูณตัวธง 7 กับผลหาร 0 ที่ได้มาจากขั้นที่ 1 นำไปลบออกจากตัวเลขถัดไปของตัวตั้งข้างบน คือ 45 แล้วหารด้วย 4 ดังนี้
$45-7(0)=45$, $45\div4=9$ เหลือเศษ 9
(พิจารณาตามขั้นที่ 1) ใส่ผลหาร 9 เป็นตัวที่สองของคำตอบ ส่วนเศษ 9 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 0 ของตัวตั้ง
เนื่องจาก $45\div4=11$ เหลือเศษ 1 จะทำให้ผลหาร คือ 11 เมื่อนำไปคูณกับตัวธง คือ 7 แล้วนำไปลบกับตัวตั้งในหลักถัดไปทางขวา ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ติดลบ ดังนั้นจึงต้องลดผลหารเพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นบวก</td>
</tr>
<tr>
<td>ขั้นที่ 3
$$\begin{array}{c|cccc|cc} 4^{7} & 4 & {}_{4}\overset{0}{5} & {}_{9}\overset{63}{0} & {}_{7}2 & 6 & 0 \\ \cline{2-8} & & 45 & 27 & & & \\ \cline{2-8} & 0 & 9 & 5 & & & \\ \cline{2-8} \end{array}$$</td>
<td>ขั้นที่ 3 หาผลลบระหว่างผลคูณของตัวธง 7 กับผลหาร 9 ที่ได้มาจากขั้นที่ 2 ดังนี้
$90-9(7)=27$, $27\div4=5$ เหลือเศษ 7
ใส่ 5 เป็นตัวที่สามของคำตอบ ส่วนเศษ 7 นำไปใส่ห้อยข้างหน้าเลข 2 ของตัวตั้ง</td>
</tr>
<tr>
<td>ขั้นที่ 4
$$\begin{array}{c|cccc|cc} 4^{7} & 4 & {}_{4}\overset{0}{5} & {}_{9}\overset{63}{0} & {}_{7}\overset{35}{2} & {}_{5}6 & 0 \\ \cline{2-8} & & 45 & 27 & 37 & & \\ \cline{2-8} & 0 & 9 & 5 & 8 & & \\ \cline{2-8} \end{array}$$</td>
<td>ขั้นที่ 4 $72-5(7)=37$, $37\div4=8$ เหลือเศษ 5
ใส่ 8 เป็นตัวที่สี่ของคำตอบ ส่วนเศษ 5 นำไปใส่ห้อยข้างหน้าเลข 6 ของตัวตั้ง</td>
</tr>
<tr>
<td>ขั้นที่ 5
$$\begin{array}{c|cccc|cc} 4^{7} & 4 & {}_{4}\overset{0}{5} & {}_{9}\overset{63}{0} & {}_{7}\overset{35}{2} & {}_{5}\overset{56}{6} & {}_{0}0 \\ \cline{2-8} & & 45 & 27 & 37 & 0 & \\ \cline{2-8} & 0 & 9 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ \cline{2-8} \end{array}$$
ตอบ 958</td>
<td>ขั้นที่ 5 $56-7(8)=0$ ไม่มีจำนวนที่จะหารต่อไป แสดงว่าสิ้นสุดการหาร
คำตอบ คือ 958</td>
</tr>
</table>

- **หรือเขียนการหารแบบตรง ดังนี้**

$$\begin{array}{c|cccc|cc} 4\ ^{7} & 4 & {}_{4}5 & {}_{9}0 & {}_{7}2 & {}_{5}6 & {}_{0}0 \\ \hline & 0 & 9 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- **หรือผลหารอาจมีค่าเป็นจำนวนลบได้เมื่อใช้จำนวนบาร์ ดังนี้**

$$\begin{array}{c|cccc|cc} 4\ ^{7} & 4 & {}_{0}5 & {}_{\bar{2}}0 & {}_{0}2 & {}_{1}6 & {}_{\bar{7}}0 \\ \hline & & (7\times1) & (7\times0) & (7\times\bar{5}) & (7\times9) & (7\times\overline{10}) \\ & 1 & 0 & \bar{5} & 9 & \overline{10} & 0 \\ \hline \end{array}$$

ดังนั้น $45026 \div 47 = 10\bar{5}9.\overline{10} = 958.0$

- **หรือพิจารณาตัวอย่างนี้ ตัวหารมีตัวเลขบางตัวมากกว่า 5 อาจใช้วิธีวินคิวลัมแปลงตัวหาร ดังนี้**

$$45026 \div 47 = 45026 \div 5\bar{3} = 958$$

$$\begin{array}{c|cccc|cccc} 5\ ^{\bar{3}} & 4 & {}_{4}5 & {}_{0}0 & {}_{2}2 & {}_{2}6 & {}_{2}0 & {}_{2}0 & {}_{2}0 \\ \hline & & (\bar{3}\times0) & (\bar{3}\times9) & (\bar{3}\times5) & (\bar{3}\times7) & (\bar{3}\times9) & (\bar{3}\times9) & \\ & 0 & 9 & 5 & 7 & 9 & 9 & 9 & \\ \hline \end{array}$$

ดังนั้น $45026 \div 5\bar{3} = 957.999... = 958$

ตอบ 958

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $62823 \div 23$

วิธีทำ

$$\begin{array}{c|cccc|cc} 2\ ^{3} & 6 & {}_{2}2 & {}_{2}8 & {}_{1}2 & {}_{1}3 & {}_{2}0 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array}$$

ตอบ $2731\frac{10}{23} = 2731.43...$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $1234 \div 12$

วิธีทำ

$$\begin{array}{c|ccc|cccc} 1\ ^{2} & 1 & {}_{0}2 & {}_{0}3 & {}_{1}4 & {}_{2}0 & {}_{1}0 & {}_{1}0 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 8 & 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

ตอบ $102\frac{10}{12} = 102.8333...$

ในบางกรณี สามารถนำจำนวนวินคิวลัมมาใช้ในการหารดังตัวอย่างที่ 5 – 8

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $828432 \div 38$

วิธีทำ $828432 \div 38 = 828432 \div 4\bar{2}$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} 4^{\bar{2}} & 8 & {}_{0}2 & {}_{2}8 & {}_{2}4 & {}_{2}3 & {}_{1}2 \\ \hline & 2 & 1 & 7 & 9 & {}_{1}0 & \\ \hline \end{array} \qquad 12-(10\times\bar{2})=32=\text{r}$$

ตอบ $21800\frac{32}{38}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $37373 \div 63$

วิธีทำ

$$\begin{array}{c|cccc|c} 6^{3} & 3 & {}_{3}7 & {}_{1}3 & {}_{\bar{5}}7 & {}_{\bar{1}}3 \\ \hline & & 6 & 0 & \bar{7} & 14 \\ \hline \end{array}$$

$37 \div 6 = 6$ เศษเหลือ 1

$6\times3=18,\ 13-18=\bar{5},\ \bar{5}\div6=0$ เศษเหลือ $\bar{5}$

<u>การหารขั้นต่อไปคือ</u> : $\bar{5}7$ หรือ $\overline{43}$

$0\times3=0,\ \overline{43}-0=\overline{43}\ ,\overline{43}\div6=\bar{7}$ เศษเหลือ $\bar{1}$

$\bar{7}\times3=\overline{21},\ \bar{1}3-\overline{21}=\bar{7}+21=14$

หมายเหตุ ใช้วิธีการวินคิวลัม (Vinculum Process) ในการแปลง $\bar{5}7 = \overline{43}$ และ $\bar{1}3=\bar{7}$

ตอบ $60\bar{7}\frac{14}{63}=593\frac{14}{63}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $62312 \div 49$

วิธีทำ $62312\div49=62312\div5\bar{1}$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 5^{\bar{1}} & 6 & {}_{1}2 & {}_{3}3 & {}_{0}1 & {}_{3}2 \\ \hline & 1 & 2 & 7 & 1 & 33 \\ \hline \end{array}$$

$6\div5=1$ เศษเหลือ 1

$\bar{1}\times1=\bar{1},\ 12-\bar{1}=12+1=13,13\div5=2$เศษเหลือ 3

การหารขั้นต่อไปคือ

$\bar{1}\times2=\bar{2},\ 33-\bar{2}=33+2=35,\ 35\div5=7$ เศษเหลือ 0

$\bar{1}\times7=\bar{7},\ 01-\bar{7}=8,\ 8\div5=1$ เศษเหลือ 3

ตอบ $1271\frac{33}{5\bar{1}}=1271\frac{33}{49}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $54545 \div 29$

วิธีทำ $54545 \div 29 = 54545 \div 3\bar{1}$

$$\begin{array}{r|cccc|c} 3^{\bar{1}} & 5 & {}_{2}4 & {}_{1}5 & {}_{2}4 & {}_{1}5 \\ \hline & 1 & 8 & 7 & {}_{1}0 & 25 = r \\ \hline \end{array}$$

ตอบ $1880\frac{25}{29}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $333.000 \div 73$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|cc|ccccc} 7^{3} & 3 & 3 & {}_{5}3 & {}_{6}0 & {}_{3}0 & {}_{5}0 \\ \hline & & 4 & 5 & 6 & 1 & \ldots \\ \hline \end{array}$$

ตอบ 4.561 ...

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $123123 \div 128$ (ในกรณี ตัวหารสามหลัก)

จากตัวอย่างข้างต้นตัวหารมีสองหลัก ในตัวอย่างนี้ตัวหารคือ 128 มีสามหลัก ให้ใช้วิธีเดียวกันกับตัวหารสองหลัก คือ แยกตัวหารออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกที่เป็น**ตัวหารใหม่**คือ 12 ส่วนที่สอง**ตัวธง**คือ 8 และ **ตัวตั้งแบ่งเป็นสองส่วนเช่นเดียวกัน คือ** 12 3 1 2 │ 3 แต่**จำนวนหลักหน้าสุดของตัวตั้งต้องเท่ากับจำนวนหลักของตัวหารใหม่** การหารให้ดำเนินการดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|cccc|c} 12\ {}^{8} & 12 & {}_{12}3 & {}_{15}1 & {}_{7}2 & {}_{12}3 \\ \hline & 0 & 9 & 6 & 1 & \\ \hline \end{array} \quad 123 - 1(8) = 115 = r$$

ตอบ $961\frac{115}{128} = 961.898$

อธิบายรายละเอียดดังนี้

12^{8} ผลลัพธ์	0	9	6	1	8	9	8
ตัวตั้ง	12	${}_{12}3$	${}_{15}1$	${}_{7}2$	${}_{12}3$	${}_{19}0$	${}_{18}0$
ผลคูณไขว้	–	(8×0)	(8×9)	(8×6)	(8×1)	(8×8)	(8×9)
ตัวตั้งใหม่	12	123	79	24	115	126	108
ตัวที่ไปลบออก	0	108	72	12	96	108	96
เศษเหลือ	12	15	7	12	19	18	12

หรือใช้วิธีการวินคิวลัม $123123 \div 128 = 123123 \div 13\bar{2}$

$$\begin{array}{r|cccc|c} 13^{\bar{2}} & 12 & {}_{12}3 & {}_{6}1 & {}_{1}2 & {}_{11}3 \\ \hline & 0 & 9 & 6 & 1 & 113-1(-2)=115=r \end{array}$$

อธิบายรายละเอียดดังนี้

$13^{\bar{2}}$ \ ผลลัพธ์	0	9	6	1	8	9	8
ตัวตั้ง	12	${}_{12}3$	${}_{6}1$	${}_{1}2$	${}_{11}3$	${}_{11}0$	${}_{9}0$
ผลคูณไขว้	–	$(\bar{2}\times0=0)$	$(\bar{2}\times9=\overline{18})$	$(\bar{2}\times6=\overline{12})$	$(\bar{2}\times1=\bar{2})$	$(\bar{2}\times8=\overline{16})$	$(\bar{2}\times9=\overline{18})$
ตัวตั้งใหม่	12	123	79	24	115	126	108
ตัวที่ไปลบออก	0	117	78	13	104	117	104
เศษเหลือ	12	6	1	11	11	9	4

หรือ**ตัวหาร 128 เป็นสามหลัก** การแยกตัวหารออกเป็นสองส่วน **ส่วนแรกที่เป็นตัวหารใหม่คือ** 1 **ส่วนที่สองตัวธง คือ** 28 และ**ตัวตั้งแบ่งเป็นสองส่วน ให้ส่วนที่สองของตัวตั้งมีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของตัวธง คือ** 1 2 3 1 │ 2 3

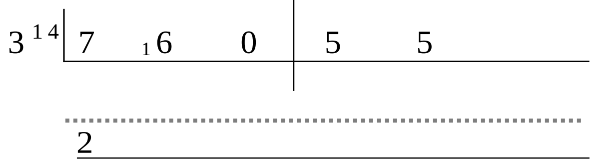
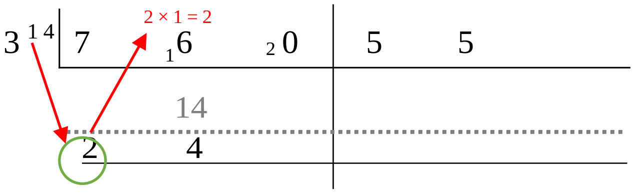
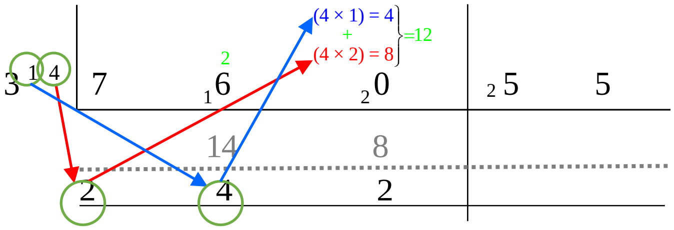
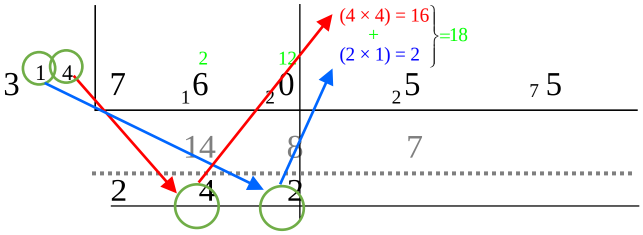
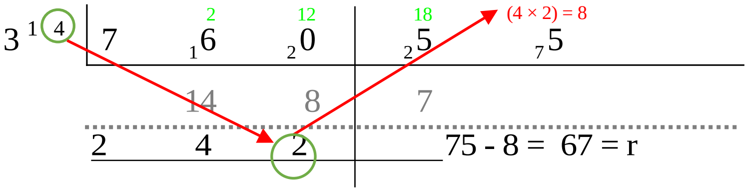
$$\begin{array}{r|cccc|cc} 1^{28} & 1 & {}_{1}2 & {}_{3}3 & {}_{9}1 & {}_{6}2 & 3 \\ \hline & 0 & 9 & 6 & 1 & \multicolumn{2}{l}{623-508=115=r} \end{array}$$

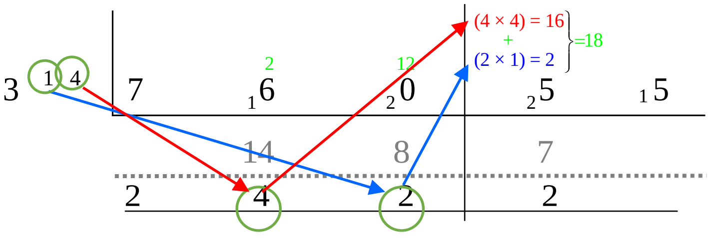
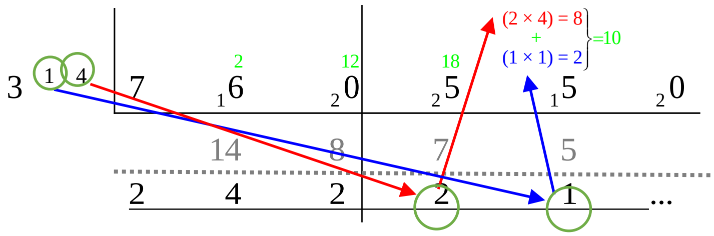
อธิบายรายละเอียดดังนี้

1^{28} \ ผลลัพธ์	0	9	6	1		
ตัวตั้ง	1	${}_{1}2$	${}_{3}3$	${}_{9}1$	${}_{6}2$	3
ผลคูณไขว้	–	$(2\times0=0)$	$\left.\begin{array}{c}(2\times9=18)\\+\\(0\times8=0)\end{array}\right\}=18$	$\left.\begin{array}{c}(2\times6=12)\\+\\(9\times8=72)\end{array}\right\}=84$	$\left.\begin{array}{c}(2\times1=2)\\+\\(6\times8=48)\end{array}\right\}=50$	$(8\times1=8)$
ตัวตั้งใหม่	1	12	15	7	623	
ตัวที่ไปลบออก	0	9	6	1	508	
เศษเหลือ	1	3	9	6	$623-508=115$	

ตอบ $961\frac{115}{128}$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $76055 \div 314$ (ในกรณี ตัวหารสามหลัก แบ่งตัวธงออกเป็นสองหลัก)

วิธีทำ	**ขั้นตอนการหาร**
ขั้นที่ 1 	**ขั้นที่ 1** $7 \div 3 = 2$ เหลือเศษ 1 ใส่ผลหาร 2 ซึ่งเป็นตัวแรกของคำตอบ ส่วนเศษ 1 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 6 ของตัวตั้งในหลักถัดไป
ขั้นที่ 2 	**ขั้นที่ 2** หาผลคูณตัวธง 1 4 กับผลหาร 2 ที่ได้มาจากขั้นที่ 1 แล้วนำไปลบออกจากตัวเลขถัดไปของตัวตั้งข้างบนคือ 16 แล้วหารด้วย 3 ดังนี้ $16 - 1(2) = 14$, $14 \div 3 = 4$ เหลือเศษ 2 ใส่ 4 เป็นตัวที่สองของคำตอบ ส่วนเศษ 2 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 0 ของตัวตั้งในหลักถัดไป
ขั้นที่ 3 	**ขั้นที่ 3** หาผลคูณไขว้ระหว่างตัวธง 1 4 กับผลหาร 2 4 ที่ได้มาจากขั้นที่ 2 แล้วนำไปลบออกจากตัวเลขถัดไปของตัวตั้งข้างบนคือ 20 แล้วหารด้วย 3 ดังนี้ $20 - 12 = 8$, $8 \div 3 = 2$ เหลือเศษ 2 ใส่ 2 เป็นตัวที่สามของคำตอบ ส่วนเศษ 2 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 5 ของตัวตั้งในหลักถัดไป
ขั้นที่ 4 	**ขั้นที่ 4** การหาเศษเหลือจากการหาร ให้หาผลคูณไขว้ระหว่างตัวธง 1 4 กับผลหาร 4 2 ที่ได้มาจากขั้นที่ 3 แล้วนำไปลบออกจากตัวเลขถัดไปของตัวตั้งข้างบนคือ 25 ดังนี้ $25 - 18 = 7$ แล้วนำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 5 ของตัวตั้งในหลักถัดไป
ขั้นที่ 5 	**ขั้นที่ 5** การหาเศษเหลือจากการหาร หาผลคูณระหว่างตัวธง 1 4 กับผลหาร 2 ที่ได้มาจากขั้นที่ 4 ซึ่งอยู่ในหลักหน่วย แล้วนำไปลบออกจากตัวเลขถัดไปของตัวตั้งข้างบนคือ 75 ดังนี้ $75 - 8 = 67$

ตอบ $242\frac{67}{314}$	**คำตอบ** คือ $242\frac{67}{314}$
ขั้นที่ 6 	**ขั้นที่ 6** การหาทศนิยมจากการหาร จากขั้นที่ 3 หาผลคูณไขว้ระหว่างตัวธง 1 4 กับผลหาร 4 2 ที่ได้มาจากขั้นที่ 2 แล้วนำไปลบออกจากตัวเลขถัดไปของตัวตั้งข้างบนคือ 25 แล้วหารด้วย 3 ดังนี้ $25-18=7$, $7\div3=2$ เหลือเศษ 1 ใส่ 2 เป็นตัวที่สี่ของคำตอบ ส่วนเศษ 1 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 5 ของตัวตั้งในหลักถัดไป
ขั้นที่ 7  **ตอบ** 242.21	**ขั้นที่ 7** การหาทศนิยมจากการหาร จากขั้นที่ 3 หาผลคูณไขว้ระหว่างตัวธง 1 4 กับผลหาร 2 2 ที่ได้มาจากขั้นที่ 6 แล้วนำไปลบออกจากตัวเลขถัดไปของตัวตั้งข้างบนคือ 15 แล้วหารด้วย 3 ดังนี้ $15-10=5$, $5\div3=1$ เหลือเศษ 2 ใส่ 1 เป็นตัวที่ห้าของคำตอบ ส่วนเศษ 2 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 0 ของตัวตั้งในหลักถัดไป คำตอบ คือ 242.21...

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าของ $716769\div156$

ตัวหาร 156 เป็นสามหลัก การแยกตัวหารออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกที่เป็นตัวหารใหม่คือ 15 ส่วนตัวธงคือ 6 ตัวตั้งคงแบ่งเป็นเช่นเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว คือ 7 1 6 7 6 | 9

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|llll|lll} 15\ {}^{6} & 71 & {}_{11}6 & {}_{17}7 & {}_{12}6 & {}_{12}9 & {}_{15}0 & {}_{9}0 \\ \hline & 4 & 5 & 9 & 4 & 6 & 7 & 3\ \ldots \end{array}$$

ตอบ $4594\frac{105}{156} = 4594.673\ldots$

อธิบายรายละเอียดดังนี้

15^6 ผลลัพธ์	4	5	9	4	6	7	3
ตัวตั้ง	71	$_{11}6$	$_{17}7$	$_{12}6$	$_{12}9$	$_{15}0$	$_{9}0$
ผลคูณไขว้	–	$(6\times4=24)$	$(6\times5=30)$	$(6\times9=54)$	$(6\times4=24)$	$(6\times6=36)$	$(6\times7=42)$
ตัวตั้งใหม่	71	92	147	72	105	114	48
ตัวที่ไปลบออก	60	75	135	60	90	105	45
เศษเหลือ	11	17	12	12	15	9	3

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่าของ $62346 \div 524$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|ccc|cc} 5^{24} & 6 & {}_{1}2 & {}_{5}3 & {}_{2}4 & {}_{2}6 \\ \hline & 1 & 1 & 9 & \multicolumn{2}{l}{26 - 36 = \overline{10} = r} \end{array}$$

ดังนั้น $119 = 118\frac{524}{524},\ 118\frac{524}{524} + \frac{\overline{10}}{524} = 118\frac{514}{524}$

ตอบ $118\frac{514}{524}$

อธิบายรายละเอียดดังนี้

5^{24} ผลลัพธ์	1	1	9		
ตัวตั้ง	6	$_{1}2$	$_{5}3$	$_{2}4$	$_{2}6$
ผลคูณไขว้	–	$(2\times1=2)$	$\left.\begin{matrix}(2\times1=2)\\+\\(1\times4=4)\end{matrix}\right\}=6$	$\left.\begin{matrix}(9\times2=18)\\+\\(1\times4=4)\end{matrix}\right\}=22$	$(4\times9=36)$
ตัวตั้งใหม่	6	10	47		
ตัวที่ไปลบออก	5	5	45		
เศษเหลือ	1	5	2	$26-36=\overline{10}$	

พิจารณาจากตารางข้างบน การหารตัวเศษมีค่าเป็นลบแต่เศษตามนิยามต้องเป็นบวก โดยวิธีการวินคิวลัม

ตอบ $119\frac{\overline{10}}{524} = 118\frac{524+\overline{10}}{524} = 118\frac{514}{524}$

หรือ

$$\begin{array}{r|ccc|cc} 5^{24} & 6 & {}_{1}2 & {}_{5}3 & {}_{7}4 & {}_{54}6 \\ \hline & 1 & 1 & 8 & \multicolumn{2}{l}{546 - 32 = 514 = r} \end{array}$$

อธิบายรายละเอียดดังนี้

5^{24} ผลลัพธ์	1	1	8		
ตัวตั้ง	6	${}_{1}2$	${}_{5}3$	${}_{7}4$	${}_{54}6$
ผลคูณไขว้	–	$(2\times1=2)$	$\left.\begin{matrix}(2\times1=2)\\+\\(1\times4=4)\end{matrix}\right\}=6$	$\left.\begin{matrix}(2\times8=16)\\+\\(1\times4=4)\end{matrix}\right\}=20$	$(4\times8=32)$
ตัวตั้งใหม่	6	10	47		
ตัวที่ไปลบออก	5	5	40		
เศษเหลือ	1	5	7	$546-32=514$	

ตอบ $118\frac{514}{524}$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่าของ $2999222\div713$

วิธีทำ

$$\begin{array}{l|ccccc|cc} 7^{13} & 2 & {}_{2}9 & {}_{1}9 & {}_{1}9 & {}_{5}2 & {}_{4}2 & {}_{36}2 \\ \hline & & (1\times0=0) & \left.\begin{matrix}(1\times4=4)\\+\\(0\times3=0)\end{matrix}\right\}=4 & \left.\begin{matrix}(1\times2=2)\\+\\(4\times3=12)\end{matrix}\right\}=14 & \left.\begin{matrix}(1\times0=0)\\+\\(2\times3=6)\end{matrix}\right\}=6 & \left.\begin{matrix}(1\times6=6)\\+\\(0\times3=0)\end{matrix}\right\}=6 & (3\times6=18) \\ & 0 & 4 & 2 & 0 & 6 & \multicolumn{2}{r}{362-18=344=r} \\ \hline \end{array}$$

ตอบ $4206\frac{344}{713}$

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่าของ $2342654\div5214$ (การหารที่ตัวหารมีสี่หลัก)

การแบ่งตัวหารออกเป็น 2 ส่วน อยู่ที่เรากำหนด เพื่อความง่ายในการหารควรใช้ตัวหารเป็น 5 ดังนั้นจึงแบ่งตัวหารเป็น 5 | 2 1 4 และตัวตั้งเป็น 2 3 4 2 | 6 5 4 ตามเงื่อนไขข้างต้น

วิธีทำ

$$\begin{array}{l|cccc|ccc} 5^{214} & 2 & {}_{2}3 & {}_{3}4 & {}_{6}2 & {}_{5}6 & {}_{18}5 & {}_{160}4 \\ \hline & 0 & 4 & 4 & 9 & \multicolumn{3}{l}{1604 - 36 = 1568 = r} \\ \hline \end{array}$$

อธิบายรายละเอียดดังนี้

5^{214} ผลลัพธ์	0	4	4	9			
ตัวตั้ง	2	${}_{2}3$	${}_{3}4$	${}_{6}2$	${}_{5}6$	${}_{18}5$	${}_{160}4$
ผลคูณไขว้	–	$(2\times0=0)$	$\left.\begin{matrix}(2\times4=8)\\+\\(0\times1=0)\end{matrix}\right\}=8$	$\left.\begin{matrix}(2\times4=8)\\+\\(0\times4=0)\\+\\(1\times4=4)\end{matrix}\right\}=12$	$\left.\begin{matrix}(2\times9=18)\\+\\(4\times4=16)\\+\\(1\times4=4)\end{matrix}\right\}=38$	$\left.\begin{matrix}(1\times9=9)\\+\\(4\times4=16)\end{matrix}\right\}=25$	$(4\times9=36)$
ตัวตั้งใหม่	2	23	26	50			
ตัวที่ไปลบออก	0	20	20	45			
เศษเหลือ		3	6	5	$1604-36=1568$		

ตอบ $449\frac{1568}{5214}$

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่าของ $987987\div8123$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|ccc|cccc}
8^{123} & 9 & {}_{1}8 & {}_{1}7 & {}_{5}9 & {}_{51}8 & {}_{510}7 & \\ \hline
 & & (1\times1=1) & \left.\begin{matrix}(1\times2=2)\\+\\(1\times2=2)\end{matrix}\right\}=4 & \left.\begin{matrix}(1\times1=1)\\+\\(1\times3=3)\\+\\(2\times2=4)\end{matrix}\right\}=8 & \left.\begin{matrix}(2\times1=2)\\+\\(2\times3=6)\end{matrix}\right\}=8 & (3\times1=3) & \\
 & 1 & 2 & 1 & 5107-3=5104=r & & & \\ \hline
\end{array}$$

ตอบ $121\frac{5104}{8123}$

ตัวอย่างที่ 17 จงหาค่าของ $54341\div7103$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|cc|ccccccc}
7^{103} & 5 & {}_{5}4 & {}_{5}3 & {}_{4}4 & {}_{3}1 & {}_{5}0 & {}_{4}0 & {}_{0}0 & {}_{\bar{3}}0 \\ \hline
 & & (1\times0=0) & \left.\begin{matrix}(1\times7=7)\\+\\(0\times0=0)\end{matrix}\right\}=7 & \left.\begin{matrix}(1\times6=6)\\+\\(0\times3=0)\\+\\(0\times7=0)\end{matrix}\right\}=6 & \left.\begin{matrix}(1\times5=5)\\+\\(7\times3=21)\\+\\(0\times6=0)\end{matrix}\right\}=26 & \left.\begin{matrix}(1\times0=0)\\+\\(6\times3=18)\\+\\(0\times5=0)\end{matrix}\right\}=18 & \left.\begin{matrix}(1\times4=4)\\+\\(5\times3=15)\\+\\(0\times0=0)\end{matrix}\right\}=19 & \left.\begin{matrix}(1\times3=3)\\+\\(0\times3=0)\\+\\(0\times4=0)\end{matrix}\right\}=3 & \left.\begin{matrix}(1\times0=0)\\+\\(4\times3=12)\\+\\(0\times3=0)\end{matrix}\right\}=12 \\
 & 0 & 7 & 6 & 5 & 0 & 4 & 3 & 0 & \bar{6}\ldots \\ \hline
\end{array}$$

ตอบ $7.650430\bar{6}\ldots=7.6504294\ldots$

ตัวอย่างที่ 18 จงหาค่าของ $5870476 \div 912314$ **(ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง)**

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r|ll|lllll}
9^{12314} & 5 & {}_{5}8 & {}_{4}7 & {}_{5}0 & {}_{7}4 & {}_{9}7 & {}_{6}6 \\
\hline
 & & (1\times 0=0) & \left.\begin{array}{c}(1\times 6=6)\\+\\(0\times 2=0)\end{array}\right\}=6 & \left.\begin{array}{c}(1\times 4=4)\\+\\(0\times 3=0)\\+\\(2\times 6=12)\end{array}\right\}=16 & \left.\begin{array}{c}(1\times 3=3)\\+\\(0\times 1=0)\\+\\(6\times 3=18)\\+\\(2\times 4=8)\end{array}\right\}=29 & \left.\begin{array}{c}(1\times 4=4)\\+\\(0\times 4=0)\\+\\(3\times 2=6)\\+\\(6\times 1=6)\\+\\(4\times 3=12)\end{array}\right\}=28 & \left.\begin{array}{c}(1\times 7=7)\\+\\(6\times 4=24)\\+\\(4\times 2=8)\\+\\(4\times 1=4)\\+\\(3\times 3=9)\end{array}\right\}=52 \\
 & 0 & 6 & 4 & 3 & 4 & 7 & \ldots
\end{array}
$$

ตอบ $6.4347\ldots$

ตัวอย่างที่ 19 จงหาค่าของ $34567 \div 6918$

วิธีทำ $34567 \div 6918 = 34567 \div 7\bar{1}2\bar{2}$

$$
\begin{array}{r|ll|llllll}
7^{\bar{1}2\bar{2}} & 3 & {}_{3}4 & {}_{6}5 & {}_{6}6 & {}_{4}7 & {}_{4}0 & {}_{4}0 & {}_{3}0 \\
\hline
 & & (\bar{1}\times 0=0) & \left.\begin{array}{c}(\bar{1}\times 4=\bar{4})\\+\\(0\times 2=0)\end{array}\right\}=\bar{4} & \left.\begin{array}{c}(\bar{1}\times 9=\bar{9})\\+\\(0\times \bar{2}=0)\\+\\(2\times 4=8)\end{array}\right\}=\bar{1} & \left.\begin{array}{c}(\bar{1}\times 9=\bar{9})\\+\\(4\times \bar{2}=\bar{8})\\+\\(2\times 9=18)\end{array}\right\}=1 & \left.\begin{array}{c}(\bar{1}\times 6=\bar{6})\\+\\(9\times \bar{2}=\overline{18})\\+\\(2\times 9=18)\end{array}\right\}=\bar{6} & \left.\begin{array}{c}(\bar{1}\times 6=\bar{6})\\+\\(9\times \bar{2}=\overline{18})\\+\\(2\times 6=12)\end{array}\right\}=\overline{12} & \left.\begin{array}{c}(\bar{1}\times 7=\bar{7})\\+\\(6\times \bar{2}=\overline{12})\\+\\(2\times 6=12)\end{array}\right\}=\bar{7} \\
 & 0 & 4 & 9 & 9 & 6 & 6 & 7 & \ldots
\end{array}
$$

ตอบ $34.99667\ldots$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาค่าของ $877778 \div 819976$

วิธีทำ $877778 \div 819976 = 877778 \div 8200\overline{24}$

$$
\begin{array}{r|l|lllllll}
8^{200\overline{24}} & 8 & {}_{0}7 & {}_{5}7 & {}_{1}7 & {}_{3}7 & {}_{\bar{1}}8 & {}_{0}0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 7 & 0 & 5 & \bar{1} & & \ldots
\end{array}
$$

ตอบ $1.0705\bar{1}\ldots = 1.07049\ldots$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

ตอนที่ 1 จงหาผลหารและเศษเหลือ

1. $5^{2}\big|\underline{\;2\quad 0\quad 9\;}$ ______________
2. $6^{3}\big|\underline{\;3\quad 2\quad 1\;}$ ______________
3. $5^{4}\big|\underline{\;2\quad 3\quad 4\;}$ ______________
4. $2^{3}\big|\underline{\;7\quad 4\;}$ ______________
5. $7^{2}\big|\underline{\;5\quad 0\quad 4\;}$ ______________
6. $6^{3}\big|\underline{\;4\quad 4\quad 4\;}$ ______________
7. $8^{2}\big|\underline{\;5\quad 4\quad 3\;}$ ______________
8. $9^{3}\big|\underline{\;5\quad 7\quad 6\;}$ ______________
9. $7^{2}\big|\underline{\;5\quad 0\quad 3\;}$ ______________
10. $2^{8}\big|\underline{\;9\quad 7\;}$ ______________
11. $4^{7}\big|\underline{\;1\quad 8\quad 4\;}$ ______________
12. $5^{3}\big|\underline{\;2\quad 1\quad 0\;}$ ______________
13. $6^{3}\big|\underline{\;3\quad 7\quad 3\;}$ ______________
14. $5^{2}\big|\underline{\;3\quad 5\quad 3\;}$ ______________
15. $4^{4}\big|\underline{\;3\quad 3\quad 3\;}$ ______________
16. $3^{7}\big|\underline{\;2\quad 6\quad 7\;}$ ______________
17. $5^{9}\big|\underline{\;3\quad 7\quad 5\;}$ ______________
18. $5^{9}\big|\underline{\;3\quad 5\quad 3\;}$ ______________

ตอนที่ 2 จงหาผลลัพธ์และตอบเป็นทศนิยมสามตำแหน่ง

19. $3^{1}\underline{\big|\,3\quad 2\quad 7}$

____

20. $5^{4}\underline{\big|\,3\quad 1\quad 3\quad 4}$

____

21. $6^{2}\underline{\big|\,5\quad 3\quad 2\quad 1}$

____

22. $7^{4}\underline{\big|\,6\quad 8\quad 2\quad 1}$

____

23. $4^{3}\underline{\big|\,2\quad 3\quad 6\quad 5\quad 7}$

____

24. $8^{7}\underline{\big|\,5\quad 7\quad 3\quad 2}$

____

25. $5^{6}\underline{\big|\,5\quad 7\quad 4\quad 4}$

____

26. $2^{3}\underline{\big|\,7\quad 8\quad 5\quad 7\quad 9}$

____

27. $4^{9}\underline{\big|\,4\quad 8\quad 4\quad 3\quad 6}$

____

28. $8^{6}\underline{\big|\,5\quad 9\quad 7\quad 8\quad 4\quad 6\quad 3\quad 4}$

____

29. $5^{6}\underline{\big|\,8\quad 9\quad 6\quad 5\quad 7\quad 9\quad 2\quad 3}$

____

30. $4^{9}\underline{\big|\,9\quad 4\quad 9\quad 5\quad 6\quad 8\quad 9\quad 3\quad 2\quad 1}$

____

31. $6^{9}\big|\underline{\,6\quad 9\quad 6\quad 9\quad 6\quad 9\quad 6\quad 9\quad 6\quad 9\quad 6\quad 9\quad 6\quad 9\,}$

32. $3^{5}\big|\underline{\,3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\,}$

33. $9^{6}\big|\underline{\,9\quad 8\quad 9\quad 7\quad 9\quad 7\quad 9\,}$

34. $3^{5}\big|\underline{\,3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\,}$

35. $9^{6}\big|\underline{\,9\quad 8\quad 9\quad 7\quad 9\quad 7\quad 9\,}$

แบบฝึกหัดชุดที่ 3

ตอนที่ 1 จงหาผลลัพธ์

1. $760559 \div 914$

2. $751339 \div 821$

3. $1076422 \div 813$

4. $62045 \div 923$

5. 495161 ÷ 603

6. 1326632 ÷ 921

7. 760673 ÷ 832

8. 751227 ÷ 915

9. 760559 ÷ 914

10. 751339 ÷ 821

11. 312976370 ÷ 9142

12. 222978784 ÷ 6107

13. 33883321 ÷ 7217

14. 2803716399 ÷ 81213

15. 397209672 ÷ 73412

16. 138462 ÷ 39838

ตอนที่ 2 จงหาผลลัพธ์ตอบเป็นทศนิยม 4 ตำแหน่ง

17. 3005418 ÷ 713

18. 19411565 ÷ 822

19. 2767773 ÷ 814

20. 9879.879 ÷ 413

21. 3094717 ÷ 642

22. 81039 ÷ 724

23. 1040201 ÷ 814

24. 231884 ÷ 543

25. 135790 ÷ 691

26. 102030.405 ÷ 7898

3.การหารแบบเทคนิคเฉพาะ

3.1. การดำเนินการหารโดยวิธีนิขิลัม (Nikhilam Method)

การดำเนินการหารโดยวิธีนิขิลัม (Nikhilam Method) เป็นการหารแบบเทคนิคเฉพาะใช้ในกรณีตัวหาร ที่มีค่าน้อยกว่าและค่าใกล้เคียงกับ $10, 100, 1000,..., 10^n$ เช่น $98, 92, 995, 89997, ...$

การหารที่คำตอบอยู่ในรูปเศษเหลือ

ตัวอย่างที่ 1 $1204 \div 9$

วิธีทำ

$$\begin{array}{lccc|c}
\underline{9} & 1 & 2 & 0 & 4 \\
1 & & & & \\
 & \downarrow & 1 & 3 & 3 \\
\cline{2-5}
 & 1 & 3 & 3 & 7
\end{array} \qquad \therefore Q=133, R=7$$

ขั้นตอนการดำเนินการหารดังนี้

1. $9 = 10 - 1$ จากการหารสังเคราะห์ในวิชาพีชคณิต จึงใช้ 1 เรียกว่า ค่าเบี่ยงฐาน (deficiency) เป็นตัวหารแทน $9 = 10 - 1$

2. แยกตัวตั้งออกเป็นสองส่วน (ผลหารและเศษเหลือ) ด้วยวิธีนี้เศษเหลือจึงมีจำนวนเลขโดดเท่ากับจำนวนเลขโดดตัวหาร ในข้อนี้เศษเหลือจึงมีจำนวนหนึ่งหลัก

3. ชักตัวเลขโดด 1 ตัวแรกของตัวตั้งลงมาเป็นตัวที่หนึ่งของคำตอบ

4. หาผลคูณของตัวแรกของคำตอบคือ 1 กับค่าเบี่ยงฐาน 1 คือ $1 \times 1 = 1$ แล้วนำไปใส่ใต้ตัวที่สอง ของตัวตั้ง แล้วหาผลบวก $2 + 1 = 3$ ใส่เป็นตัวที่สองของคำตอบ

5. หาผลคูณของตัวที่สองของคำตอบคือ 3 กับค่าเบี่ยงฐาน 1 คือ $1 \times 3 = 3$ แล้วนำไปใส่ใต้ตัวที่สามของตัวตั้ง คือ 3 และหาผลบวก $3 + 0 = 3$ ใส่เป็นตัวที่สามของคำตอบ

6. ในทำนองเดียวกัน หาผลคูณของตัวที่สามของคำตอบคือ 3 กับค่าเบี่ยงฐาน 1 คือ $1 \times 3 = 3$ แล้วนำไปใส่ใต้ตัวที่สี่ของตัวตั้ง คือ 3 และหาผลบวก $3 + 4 = 7$ ใส่เป็นตัวที่สี่ของคำตอบ ซึ่งเป็นเศษเหลือของคำตอบและเป็นหลักสุดท้ายของคำตอบ (Q หมายถึง ผลหาร R หมายถึง เศษเหลือ)

การพิสูจน์เชิงพีชคณิต

พิสูจน์ ให้ $(x^3 + 2x^2 + 0x + 4) \div (x - 1)$ ด้วยวิธีการหารแบบสังเคราะห์

$$\begin{array}{l|l}
\underline{x-1} & \overline{x^3 + 2x^2 + 0x + 4} \\
\quad 1 & \underline{\quad\ 1 \quad\ 3 \quad\ 3} \\
\end{array}$$

$$1x^2 + 3x + 3 \qquad 7 = R$$ เมื่อพิจารณา ให้ $x = 10$ เป็นเลขคณิตดังข้างต้น

ตัวอย่างที่ 2 $243 \div 9$

วิธีทำ

$$\begin{array}{lcc|c}
\underline{9} & 2 & 4 & 3 \\
1 & \downarrow & 2 & 6 \\
\cline{2-4}
 & 2 & 6 & 9
\end{array} = 26\frac{9}{9} = 27 \quad \therefore Q=27, R=0$$

ตอบ 27 เศษเหลือ 0

จะเห็นว่าหลักสุดท้ายครบแล้ว เป็นการสิ้นสุดการหาร แต่การหารตามขั้นตอนการหารของยุคลิด (Euclid’s Algorithm) เศษเหลือต้องน้อยกว่าตัวหาร ดังนั้นเมื่อเศษเหลือ ในตัวอย่างนี้ คือ 9 นำ 9 หารด้วย 9 ได้ผลหาร 1 เศษเหลือ 0 บวกผลหาร 1 เศษเหลือ 0 กับ 26 เป็น 27

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $1011649 \div 9$

วิธีทำ

$$\begin{array}{c cccccc|c|c}
\underline{9} & 1 & 0 & 1 & 1 & 6 & 4 & 9 & \\
1 & & & & & & & & \\
 & \downarrow & 1 & 1 & 2 & 3 & 9 & {}_{1}3 & \\
\cline{2-8}
 & 1 & 1 & 2 & 3 & 9 & {}_{1}3 & {}_{2}2 & \\
 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 2 \\
 & & & & & & & & \underline{2} \\
\cline{3-9}
 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4
\end{array} = 112403 + 2/4 = 112405/4$$

$\therefore$ Q=112405, R=4

กรณีเศษเหลือมากกว่าตัวหารในขั้นตอนแรก ให้ดำเนินการหารต่อ จนกว่าเศษเหลือน้อยกว่าตัวหาร ผลหารขั้นสุดท้ายคือผลรวมของผลหารในแต่ละครั้ง

กรณีตัวหารมีสองหลักขึ้นไป

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $3483 \div 99$

วิธีทำ จากโจทย์ แยกตัวตั้งออกเป็นสองส่วน เศษเหลือจึงมีจำนวนเลขโดดเท่ากับจำนวนเลขโดดของตัวหารคือ 99 ในข้อนี้เศษเหลือจึงมีจำนวนสองหลัก

$$\begin{array}{c cc|c|cc}
\underline{99} & 3 & 4 & 8 & 3 & \\
01 & & 0 & 3 & & \\
 & & & 0 & 4 & \\
\cline{3-5}
 & 3 & 4 & {}_{1}1 & 7 & \\
 & 3 & 5 & 1 & 1 & 7 \\
 & & & & 0 & 1 \\
\cline{2-6}
 & 3 & 5 & 1 & 1 & 8
\end{array} = 35/18 \quad \therefore Q=35,\ R=18$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ

1) $1296 \div 98$

$$\begin{array}{c cc|c|cc}
\underline{98} & 1 & 2 & 9 & 6 & \\
02 & & 0 & 2 & & \\
 & & & 0 & 4 & \\
\cline{2-5}
 & 1 & 2 & {}_{1}2 & 0 & \\
 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\
 & & & & 0 & 2 \\
\cline{3-6}
 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2
\end{array} = 13/22 \quad \therefore Q=13,\ R=22$$

2) $1234 \div 996$

$$\begin{array}{l c|ccc}
\underline{996} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
004 & & 0 & 0 & 4 \\ \cline{2-5}
 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ \cline{2-5}
\end{array} = 1/238 \quad \therefore Q=1, R=238$$

3) $2671 \div 828$

$$\begin{array}{l c|cccc}
\underline{828} & 2 & 6 & 7 & 1 & \\
172 & & 2 & {}_{1}4 & 4 & \\ \cline{2-5}
 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{{}_{1}0} & 1 & 5 & \\
 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{1} & 0 & 1 & 5 \\
 & & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & 7 & 2 \\ \cline{3-6}
 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{1} & 1 & 8 & 7 \\ \cline{2-6}
\end{array} = 3/187 \quad \therefore Q=3, R=187$$

4) $39999 \div 9819$

$$\begin{array}{l c|ccccc}
\underline{9819} & 3 & 9 & 9 & 9 & 9 & \\
0181 & & 0 & 3 & {}_{2}4 & 3 & \\ \cline{2-6}
 & 3 & 9 & {}_{1}2 & {}_{3}3 & {}_{1}2 & \quad (10542) \\
 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{1} & 0 & 5 & 4 & 2 \\
 & & \multicolumn{1}{c|}{} & 0 & 1 & 8 & 1 \\ \cline{2-7}
 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{1} & 0 & 6 & {}_{1}2 & 3 \\ \cline{2-7}
\end{array} = 4/0723 \quad \therefore Q=4, R=0723$$

5) $1010101 \div 89997$

$$\begin{array}{l cc|ccccc}
\underline{89997} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
10003 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \cline{2-8}
 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ \cline{2-8}
\end{array} = 11/20134 \quad \therefore Q=11, R=20134$$

6) $11199171 \div 99979$

$$\begin{array}{r ccc|cccccc l}
\underline{99979} & 1 & 1 & 1 & 9 & 9 & 1 & 7 & 1 & & \\
00021 & & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 9 & {}_{1}1 & 4 & {}_{1}0 & 2 & & (101502) \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 & 2 & 3 & =112/01523 \quad \therefore Q=112, R=01523
\end{array}$$

การหารที่คำตอบอยู่ในรูปทศนิยม

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $3483 \div 99$ (ตอบเป็นทศนิยม 5 ตำแหน่ง)

วิธีทำ • ให้ดำเนินการในทำนองเดียวกับข้างต้น แยกตัวตั้งออกเป็นสองส่วน ส่วนทางขวามือหรือส่วนท้ายจะต้องมีจำนวนเลขโดดเท่ากับจำนวนเลขโดดของตัวหาร

• ใส่เลข 0 ต่อท้ายสุดของตัวตั้งตามตำแหน่งของทศนิยมที่ต้องการ

$3483 \div 99$

$$\begin{array}{r cc|cccccc l}
\underline{99} & 3 & 4 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & & \\
01 & & 0 & 3 & & & & & & \\
 & & & 0 & 4 & & & & & \\
 & & & & 0 & {}_{1}1 & & & & \\
 & & & & & 0 & 7 & & & \\
 & & & & & & 0 & {}_{1}1 & \ldots & \\
\hline
 & 3 & 4 & {}_{1}1 & 7 & {}_{1}1 & 7 & {}_{1}1 & \ldots & =35.1818181\ldots
\end{array}$$

$\therefore Q=35.18182$

แบบฝึกหัดชุดที่ 4

จงดำเนินการหารของสองจำนวนต่อไปนี้โดยใช้วิธีนิขิลัม

1. 1121÷9

2. 23012÷9

3. 21234÷9

4. 256÷9

5. 3452÷9

6. 4254÷9

7. 7107÷9

8. 6434÷9

9. 7777÷9

10. 82828÷9

11. 101÷8

12. 1101÷8

13. 2121÷8

14. 11111÷8

15. 132÷8

16. 234÷88

17. 167÷89

18. 213÷76

19. 144÷83

20. 221÷49

21. 1224÷887

22. 3010÷799

23. 4321÷893

24. 12034÷8877

25. 3030÷498

26. 1021÷89

27. 1123÷88

28. 10101÷899

29. 12345÷8888

30. 12345÷7999

31. 13579÷8897

32. 11203÷8897

33. 10102÷7989

34. 1010101÷899997

35. 210012÷8997

36. 300000÷8998

37. 101020÷8888

38. 200165÷8987

39. 2002002÷89998

40. 1234567÷89997

41. 1030007÷9987

42. 11111111÷99979

43. 20137÷9819

44. 12946÷8997

45. 1011÷23

46. 81039÷724

47. 1040201÷814

48. 231884÷543

49. 135790÷691

50. 102030.405÷7898

3.2 การดำเนินการหารโดยวิธีปราววรรตย์ (Paravartya MEthod)

คำว่า ปราววรรตยสูตร (Transpose and Apply) หมายถึง การสับเปลี่ยนหรือปรับเปลี่ยน ดังนั้นการดำเนินการหารโดยวิธีปราววรรตย์ เป็นการสับเปลี่ยนการดำเนินการหารตรงกันข้ามกับการดำเนินการหารโดยวิธีนิขิลัม (Nikhilam Method) เป็นการหารแบบเทคนิคเฉพาะ กล่าวคือ ใช้ตัวหารที่มีค่ามากกว่าและใกล้เคียงกับ $10, 100, 1000,..., 10^n$ และค่าเบี่ยงฐานเปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงกันข้ามกับค่าเบี่ยงฐานของวิธีนิขิลัม นั่นคือ ค่าเบี่ยงฐานจึงมีค่าเป็นลบ

การหารเชิงพีชคณิต (Algebraic Division)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $(3x^2+2x+12)\div(x+2)$

$$\begin{array}{lccl} x+2\ ) & 3x^2 & +2x & +12 \\ -2 & & -6 & +8 \\ \cline{2-4} & 3x & -4 & \text{เศษ } 20 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

> **ข้อสังเกต** การหารมีข้อตกลงในการสับเปลี่ยนเครื่องหมายที่ค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $(x^3+6x^2+13x+13)\div(x^2+2x+3)$

$$\begin{array}{lcccc} x^2+2x+3) & x^3 & +6x^2 & +13x & +13 \\ -2\quad -3 & & -2 & -3 & \\ & & & -8 & -12 \\ \cline{2-5} & x & +4 & \text{เศษ}\ 2x & +1 \\ \cline{2-5} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $(2x^5+3x^4+5x^3+2x^2+x+30)\div(x^3+2x^2+x+3)$

$$\begin{array}{lcccccc} x^3+2x^2+x+3) & 2x^5 & +3x^4 & +5x^3 & +2x^2 & +x & +30 \\ -2\quad -1\quad -3 & & -4 & -2 & -6 & & \\ & & & 2 & 1 & 3 & \\ & & & & -10 & -5 & -15 \\ \cline{2-7} & 2x^2 & -x & +5\ \text{เศษ} & -13x^2 & -x & +15 \\ \cline{2-7} \end{array}$$

การหารเชิงเลขคณิต (Arithmetic Division)

การหารโดยวิธีปราววรรตย์จะง่ายและรวดเร็วเมื่อตัวหารเป็น 123, 104, 1112, 11234,... ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $432 \div 11$

วิธีทำ

$$\begin{array}{c@{\qquad}cc|c} \underline{11} & 4 & 3 & 2 \\ \bar{1} & & \bar{4} & \\ & & & 1 \\ \cline{2-4} & 4 & \bar{1} & 3 \\ \cline{2-4} \end{array} \qquad \therefore Q=4\bar{1}=39,\ R=3$$

ขั้นตอนวิธีดำเนินการหาร

1. $11=10+1$ จากการหารสังเคราะห์ในวิชาพีชคณิต จึงมีการสับเปลี่ยนเครื่องหมายค่าเบี่ยงฐาน คือ 1 เปลี่ยนเครื่องหมายเป็น $-1=\bar{1}$ เป็นตัวหารแทน $11=10+1$

2. แยกตัวตั้งออกเป็น 2 ส่วน (ผลหารและเศษเหลือ) ด้วยวิธีนี้เศษเหลือจึงมีจำนวนเลขโดด เท่ากับจำนวนเลขโดดของค่าเบี่ยงฐานสับเปลี่ยน ในข้อนี้เศษเหลือจึงมีจำนวนหนึ่งหลัก

3. การดำเนินการหาร นำ 4 ซึ่งเป็นตัวเลขโดดตัวแรกของตัวตั้งลงมาเป็นตัวที่หนึ่งของคำตอบ

4. หาผลคูณ 4 ด้วยค่าเบี่ยงฐานสับเปลี่ยน $\bar{1}$ คือ $4\times\bar{1}=\bar{4}$ แล้วนำไปใส่ใต้ตัวที่สองของตัวตั้ง และหาผลบวก $\bar{4}+3=\bar{1}$ ใส่เป็นตัวที่สองของคำตอบ

5. หาผลคูณ $\bar{1}$ ด้วยค่าเบี่ยงฐานสับเปลี่ยน $\bar{1}$ แล้วนำไปใส่ใต้ตัวที่สามของตัวตั้ง คือ 1 และหาผลบวก $2+1=3$ ใส่เป็นตัวที่สามของคำตอบ

6. จะเห็นว่าหลักสุดท้ายครบแล้ว ตอบ Q=39, R=3

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $1364 \div 112$

วิธีทำ

$$\begin{array}{c@{\qquad}cc|cc} \underline{112} & 1 & 3 & 6 & 4 \\ \overline{12} & & \bar{1} & \bar{2} & \\ & & & \bar{2} & \bar{4} \\ \cline{2-5} & 1 & 2 & 2 & 0 \\ \cline{2-5} \end{array} \qquad \therefore Q=12, R=20$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $10121 \div 113$ (ตัวเลขในคำตอบบางตัวเป็นลบ)

วิธีทำ

$$\begin{array}{c@{\qquad}ccc|cc} \underline{113} & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \overline{13} & & \bar{1} & \bar{3} & & \\ & & & 1 & 3 & \\ & & & & 1 & 3 \\ \cline{2-6} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 6 & 4 \\ \cline{2-6} \end{array} \quad =89 \;\Big|\; 64 \qquad \therefore Q=89, R=64$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $12441 \div 1121$(ค่าเบี่ยงฐานสับเปลี่ยนสามหลัก)

วิธีทำ

$$\begin{array}{l@{\qquad}cc|ccc}
\underline{1121} & 1 & 2 & 4 & 4 & 1\\
\overline{1}\overline{2}\overline{1} & & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} & \\
 & & & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1}\\
\cline{2-6}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
\qquad \therefore Q=11,\ R=110$$

ตัวอย่างที่ 5 ในกรณีตัวหารเป็น 11 จงหาค่าของ $3456 \div 11$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 1

$$\begin{array}{l@{\qquad}ccc|c}
\underline{11} & 3 & 4 & 5 & 6\\
\overline{1} & & \overline{3} & & \\
 & & & \overline{1} & \\
 & & & & \overline{4}\\
\hline
 & 3 & 1 & 4 & 2
\end{array}
\qquad \therefore Q=314,\ R=2$$

จากตัวอย่างที่ 5 นี้พบเทคนิคการหารที่ตัวหารเป็น 11 ดังนี้

$$\begin{array}{r|ccc|c}
11\,) & 3 & 4 & 5 & 6\\
 & 3 & 1 & 4 & 2\\
\cline{2-5}
\end{array}$$

เริ่มจากทางซ้ายมือชักตัวเลขหลักแรกของโจทย์ คือ 3 เป็นตัวแรกของคำตอบ แล้วนำไปลบออกจากตัวเลขถัดไปเป็นคำตอบตัวต่อไป $4-3=1$ ในทำนองเดียวกัน $5-1=4, 6-4=2,$ นี้ ได้ 2 เป็นเศษเหลือ

$\therefore Q=314, R=2$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $872032 \div 11$

$$\begin{array}{r|ccccc|cc}
11\,) & 8 & 7 & 2 & 0 & 3 & 2 & \\
 & & 8 & \overline{1} & 3 & \overline{3} & 6 & \overline{4}\\
\cline{2-7}
\end{array}
\quad = 79276+\frac{-4}{11} = 79276+\left(\frac{-4}{11}+\frac{11}{11}\right)-\frac{11}{11}$$

$\therefore$ Q=79275, R=7

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $1212 \div 112$ (ตัวอย่างนี้แสดงเศษเหลือในรูปทศนิยม)

วิธีทำ

$$\begin{array}{l@{\qquad}cc|cccccc}
\underline{112} & 1 & 2 & 1 & 2\,. & 0 & 0 & 0 & 0\\
\overline{1}\overline{2} & & \overline{1} & \overline{2} & & & & & \\
 & & & \overline{1} & \overline{2} & & & & \\
 & & & & 2 & 4 & & & \\
 & & & & & \overline{2} & \overline{4} & & \\
 & & & & & & \overline{2} & \overline{4} & \\
\cline{2-8}
 & 1 & 1\,. & \overline{2} & 2 & 2 & \overline{6} & \ldots & \\
\cline{2-8}
\end{array}
\qquad =10.8214\ldots$$

ตัวอย่างที่ 8. $1212 \div 112$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้แสดงเศษเหลือในรูปทศนิยม

$$\begin{array}{l cc|ccccccc l}
\underline{112} & 1 & 2 & 1 & 2\,. & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\bar{1}\;\bar{2} & & \bar{1} & \bar{2} & & & & & & & \\
 & & & \bar{1} & \bar{2} & & & & & & \\
 & & & & 2 & 4 & & & & & \\
 & & & & & \bar{2} & \bar{4} & & & & \\
 & & & & & & \bar{2} & \bar{4} & & & \\
\cline{2-9}
 & 1 & 1 & .\,\bar{2} & 2 & 2 & \bar{6} & \ldots & & & =10.8214\ldots \\
\cline{2-9}
\end{array}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 4

จงดำเนินการหารของสองจำนวนต่อไปนี้โดยวิธีปราวรรตย์

1. $1233 \div 112$
2. $1377 \div 123$
3. $1481 \div 139$
4. $2584 \div 123$
5. $36915 \div 123$
6. $13696 \div 113$

7. 121212÷113

8. 13545÷1212

9. 137987÷1121

10. 79999÷111

11. 2652÷121

12. 33033÷1231

13. 2321÷118

14. 1991÷119

15. 12345÷1028

16. 1387÷224

17. 301765÷2024

18. 1010÷113 (ทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

19. 207÷101 (ทศนิยม 6 ตำแหน่ง)

20. 1÷1111 (ทศนิยม 8 ตำแหน่ง)

21. 246÷11

22. 426÷11

23. $7362 \div 11$

24. $1234 \div 160$

25. $239479 \div 11203$

26. $13456 \div 1123$

27. $103 \div 82$

28. $39999 \div 9819$

29. $12345 \div 8888$

30. $1111 \div 839$

31. 13579÷8897

32. 4009÷882

33. 2699÷224

34. 1699÷223

35. 7685÷672

36. 7685÷112

37. 1699÷223

38. 1334÷439

39. 1234÷511

40. 1177÷516

3.3 การดำเนินการหารโดยวิธีเพิ่มหรือลดสัดส่วน (อนุรูปเยณ = Anurupyena Method)

อนุรูปเยณ (Anurupyena) แปลว่าสัดส่วน (proportionality) เป็นการหารแบบเพิ่มหรือลดสัดส่วนของตัวหาร ให้มีค่าใกล้เคียงกับจำนวนเต็ม 10, 100, 1000,..., 10^n

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $1011 \div 23$

วิธีทำ ตัวหาร 23 สามารถเพิ่มสัดส่วนเป็น $23 \times 4 = 92$ เพื่อเป็นตัวหารในวิธีนิขิลัม เมื่อทำการหารโดยวิธีนิขิลัมแล้วผลลัพธ์ต้องคูณด้วย 4 แต่ เศษเหลือ ไม่ต้องคูณ

$$
\begin{array}{l cc|cc l}
92 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
08 & \downarrow & 0 & 8 & & \\
 & & & 0 & 0 & \\
\cline{2-5}
 & 1 & 0 & 9 & 1 & \\
 & \times & 4 & & & \\
\cline{2-3}
 & 4 & 0 & 9 & 1 & = 4\,3 \big| \;\; 22 \;\; [\because 91 = 3 \times 23 + 22] \\
\cline{2-5}
 & & & & & \therefore Q=43,\ R=22
\end{array}
$$

ขั้นตอนวิธีการหาร

1. เนื่องจากตัวหาร 23 สามารถเพิ่มสัดส่วนโดยการคูณด้วย 4 จะได้สัดส่วนเพิ่มเป็น 92 ดังนั้นสามารถดำเนินการหารโดยวิธีนิขิลัมได้

2. $92 = 100 - 08$ จึงใช้ 08 เรียกว่าค่าเบี่ยงฐาน (deficiency) เป็นตัวหาร

3. แยกตัวตั้งออกเป็นสองส่วน (ผลหารและเศษเหลือ) ด้วยวิธีนี้เศษเหลือจึงมีจำนวนเลขโดดเท่ากับจำนวนเลขโดดของตัวหาร ดังนั้นเศษเหลือจึงมีจำนวนสองหลัก แล้วใช้การหารโดยวิธีนิขิลัมได้

คำตอบ $1011 \div 23 = 40 \big|\ 91$ คือ Q=40, R=91

พบว่าเศษเหลือมากกว่าตัวหาร ซึ่ง $91 = 23 \times 3 + 22$ นั่นคือ Q=3, R=22 นำไปบวกกับผลหารข้างต้นได้**คำตอบคือ** Q=43, R=22

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $12345 \div 204$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้ตัวหารไม่ได้เริ่มต้น 1 แต่มี 2 เป็นตัวประกอบ 102×2 ซึ่งเราสามารถลดสัดส่วนตัวหารได้เป็น $12345 \div 204 = 12345 \div 102(2)$

$$\begin{array}{l|ccc|cc}
\underline{204} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & & & & & \\
\underline{102} & & & & & \\
0\bar{2} & & 0 & \bar{2} & & \\
 & & & 0 & \bar{4} & \\
 & & & & 0 & \bar{2} \\
\hline
2) & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\
 & & & 60\,{}^{1}\!/_{2} & 0 & 3 \\
 & & & \underline{\underline{60}} & \underline{\underline{105}} &
\end{array}$$

> เมื่อพิจารณาเชิงพีชคณิตตัวอย่างนี้ ตัวหารคือ 02
> ดังนั้น คำตอบต้องหารด้วย 02
> ยกเว้น ตัวเศษเหลือ คือ เป็นครึ่งหนึ่งของตัวหาร 204
> เศษเหลือจึงเป็น $\frac{1}{2}(204) + 03 = 105$

ข้อสังเกต ตัวอย่างนี้ ลองหารแบบตรงจะง่ายกว่า ดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{array}{c|cccc|c}
2^{04} & 1 & {}_{0}2 & {}_{0}3 & {}_{3}4 & {}_{10}5 \\
\hline
 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 04 \\ 06 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 04 \\ 60 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} & \\
\hline
0 & & 6 & 0 & \multicolumn{2}{c}{105 - 0 = 105} \\
\hline\hline
\end{array} \quad \therefore Q=60, R=105$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $1344 \div 37$

วิธีที่ 1 ตัวหารเป็น 37 สามารถเพิ่มสัดส่วนเป็น 3 เท่า คือ $37 \times 3 = 111$

เพื่อหารโดยวิธีปราววรรตย์

$$\begin{array}{lcc|cc}
\underline{111} & 1 & 3 & 4 & 4 \\
\bar{1}\bar{1} & & \bar{1} & \bar{1} & \\
 & & & \bar{2} & \bar{2} \\
\hline
3\times & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 & 3 & 6 & 1 & 2 \\
\hline
\end{array} \qquad \therefore Q=36, R=12$$

วิธีที่ 2 เพิ่มสัดส่วนเป็น 3 เท่าทั้งตัวตั้งและตัวหาร จะได้ $4032 \div 111$ ในกรณีนี้คำตอบไม่ต้องลดสัดส่วน แต่เศษเหลือค่าต้องไม่เกินตัวหาร 37

$$\begin{array}{l} \underline{111} \\ \bar{1}\bar{1} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 4 & 0 & 3 & 2 \\ & \bar{4} & \bar{4} & \\ & & 4 & 4 \\ \hline 4 & \bar{4} & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ \hline \end{array} \qquad \therefore Q=36,\ R=12$$

วิธีที่ 3 **หารแบบตรง**

$$3^7 \begin{array}{|ccc|c} 1 & {}_0 3 & {}_4 4 & {}_5 4 \\ \hline 0 & 3 & 6 & 54-42=12 \\ \hline \end{array} \qquad \therefore Q=36,\ R=12$$

3.4 การดำเนินการหารโดยวิธีการวินคิวลัม (Vinculum Process of Division)

วินคิวลัม (คือการแปลงจำนวนเลขโดดที่มีค่าเกิน 5 ให้เป็นจำนวนที่มีเลขโดดไม่เกิน 5 ในรูปเครื่องหมาย - (bar) บนตัวเลข เช่น $9819 = 10\bar{2}2\bar{1}$) เป็นการหารแบบเทคนิคเฉพาะ เมื่อแปลงจำนวนเสร็จแล้ว สามารถดำเนินการหารโดยวิธีนิขิลัมและวิธีปราวรรตย์ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $49999 \div 9819$

วิธีนิขิลัม

$49999 \div 9819$

$$\begin{array}{l} \underline{9819} \\ 0181 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} 4 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ \downarrow & 0 & 4 & {}_3 2 & 4 \\ \hline 4 & 9 & {}_1 3 & {}_4 1 & {}_1 3 \\ 4 & {}_1 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & & 9 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ Q=5, R=904

วิธีวินคิวลัมทำตามวิธีปราวรรตย์

$49999 \div 9819 = 49999 \div 10\bar{2}2\bar{1}$

$$\begin{array}{c} \underline{1\ 0\ \bar{2}\ 2\ \bar{1}} \\ \underline{0\ 2\ \bar{2}\ 1} \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} 4 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ \downarrow & 0 & 8 & \bar{8} & 4 \\ \hline 4 & 9 & {}_1 7 & 1 & {}_1 3 \\ 4 & {}_1 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & & 9 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ Q=5, R=904

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $2621 \div 828$

วิธีทำ $2621 \div 828 = 2621 \div 1\bar{2}3\bar{2}$

$$\begin{array}{l c c|c c c l}
\underline{1\bar{2}3\bar{2}} & & 2 & 6 & 2 & 1 & \\
2\bar{3}2 & & & 4 & \bar{6} & 4 & \\ \cline{3-6}
 & & 2 & {}_{1}0 & \bar{4} & 5 & \rightarrow 2/965 \text{ แสดงว่า } Q = 2, r = 965 \text{ ซึ่งเศษมากกว่าตัวหาร} \\ \cline{3-6}
 & & 3 & 1 & 3 & 7 & [\because 965 = 1 \times 828 + 137] \\ \cline{3-6} \cline{3-6}
\end{array}$$

$\therefore$ Q=3, R=137

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $167388 \div 87$

วิธีทำ $167388 \div 87 = 2\bar{3}\bar{3}4\bar{1}\bar{2} \div 87$

$$\begin{array}{l c c c c c|c c}
\underline{87} & & 2 & \bar{3} & \bar{3} & 4 & \bar{1} & \bar{2} \\
13 & & & 2 & 6 & & & \\
 & & & & \bar{1} & \bar{3} & & \\
 & & & & & 2 & 6 & \\
 & & & & & & 3 & 9 \\ \cline{3-8}
 & & 2 & \bar{1} & 2 & 3 & 8 & 7 \\ \cline{3-8}
\end{array} = 1923|\ 87 = 1923\frac{87}{87} \quad \therefore Q=1924,\ R=0$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $11011 \div 119$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้เหมาะสำหรับ การดำเนินการหารโดยวิธีวินคิวลัม

$11011 \div 119 = 11011 \div 12\bar{1}$

$$\begin{array}{l c c c c|c c}
\underline{12\bar{1}} & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\bar{2}1 & & & \bar{2} & 1 & & \\
 & & & & 2 & \bar{1} & \\
 & & & & & \bar{6} & 3 \\ \cline{3-7}
 & & 1 & \bar{1} & 3 & \bar{6} & 4 \\
 & & & 9 & 3 & \bar{5} & \bar{6} \\ \cline{4-7}
 & & & 9 & 2 & 6 & 3 \\ \cline{4-7}
\end{array} \qquad \therefore Q=92,\ R=63$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $11891 \div 109$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้เหมาะกับการดำเนินการหารโดยวิธีวินคิวลัมในการคำนวณทั้งตัวตั้งและตัวหาร

$11891 \div 109 = 2\bar{1}\bar{1}1 \div 11\bar{1}$

$$
\begin{array}{c@{\qquad}cc|ccc}
\underline{11\bar{1}} & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{1} & 1 \\
\bar{1}1 & & \bar{1} & 1 & & \\
 & & & \bar{1} & 1 & \\
 & & & & 1 & \bar{1} \\
\cline{2-6}
 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & 0 \\
 & 1 & 0 & 9 & 1 & 0 \\
\cline{2-6}\cline{2-6}
\end{array}
\qquad \therefore Q=109,\ R=10
$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 5

จงดำเนินการหารของสองจำนวนต่อไปนี้โดยวิธีเพิ่มหรือลดสัดส่วน

1. $1400 \div 199$
2. $1699 \div 223$
3. $1334 \div 439$
4. $12584 \div 511$
5. $12345 \div 331$
6. $1177 \div 516$

7. 1011÷23

8. 13045÷494

9. 137987÷1427

10. 79999÷555

11. 2652÷121

12. 33033÷1231

13. 2321÷118

14. 1991÷119

จงดำเนินการหารของสองจำนวนต่อไปนี้โดยวิธีการวินคิวลัม

15. 21999÷8819

16. 1356÷182

17. 4009÷882

18. 7685÷672

19. 1234÷879

20. 1÷9999

21. 1400÷199

22. 1699÷679

23. 20332÷299

24. 210840478÷647

4. การดำเนินการหารด้วยเศษส่วนช่วย (Auxiliary Fractions)

เนื่องจากการหารเป็นการกระทำผกผันการคูณ ดังนั้น a ÷ b เขียนแทนด้วยเศษส่วน $\frac{a}{b}$

บทนิยาม เศษส่วนสามัญ (vulgar/common fraction) คือจำนวนตรรกยะที่สามารถเขียนอยู่ในรูป a / b หรือ $\frac{a}{b}$ โดยที่ a , b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ เรียก a ว่าตัวเศษ เรียก b ว่าตัวส่วน เศษส่วนสามัญ ยังแยกออกเป็น **เศษส่วนแท้** (proper fraction) ซึ่งมีค่าของตัวเศษน้อยกว่าตัวส่วนทำให้ปริมาณของเศษส่วนน้อยกว่า 1 เช่น $\frac{7}{9}$ และ**เศษเกิน** (improper fraction) คือเศษส่วนที่ค่าของตัวเศษมากกว่าหรือเท่ากับตัวส่วน เช่น $\frac{5}{5}, \frac{9}{7}$

บทนิยาม จำนวนคละ (mixed number) เป็นการนำเสนอเศษส่วนอีกรูปแบบหนึ่ง โดยนำจำนวนเต็มประกอบเข้ากับเศษส่วนแท้ และมีปริมาณเท่ากับสองจำนวนนั้นบวกกันตัวอย่าง เช่น มีเค้กสองชิ้นและมีเค้กที่เหลือ อยู่อีกสามในสี่ส่วน สามารถเขียนแทนได้ด้วย $2\frac{3}{4}$

ในเวทคณิตมีวิธีการแปลงเศษส่วนสามัญให้อยู่ในรูปเศษส่วนที่มีตัวเศษอยู่ในรูปทศนิยมและตัวส่วนเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์

ตัวอย่าง

(1) $\frac{1}{800} = \frac{0.01}{8}$

(2) $\frac{39}{70} = \frac{3.9}{7}$

(3) $\frac{17}{130} = \frac{1.7}{13}$

(4) $\frac{3741}{110000} = \frac{0.3741}{11}$

(5) $\frac{97654}{90000000} = \frac{0.0097654}{9}$

การแปลงเศษส่วนสามัญให้เป็นเศษส่วนช่วยทำให้เราสามารถดำเนินการหารได้ง่ายขึ้นและผลลัพธ์ที่ได้เป็นจำนวนที่อยู่ในรูปทศนิยมที่อาจจะเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะก็ได้

บทนิยาม เศษส่วนช่วย (Auxiliary Fractions) คือจำนวนที่สามารถเขียนอยู่ในรูป a / b หรือ $\frac{a}{b}$ โดยที่ a อยู่ในรูปทศนิยม และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์

เศษส่วนช่วย แบ่งออกเป็น 2 แบบ

4.1 เศษส่วนช่วยแบบที่ 1

จากสูตรแรกของเวทคณิตคือ เอกาธิเกนะ ปุรเวณะ(Ekadhikena Purvena หรือ one more than the previous one) หมายถึงการปัดค่าตัวเลขโดดโดยเพิ่มค่าขึ้น 1 หน่วย (Rounding up process) สำหรับตัวเลขที่อยู่ข้างหน้าของเลข 9 หรืออนุกรมของ 9 เช่น 3.9 เขียนแทนด้วย 4.0, 8.29 เขียนแทนด้วย 8.3 และ 0.0499 เขียนแทนด้วย 0.05

การปัดค่าในกรณีนี้สามารถนำไปใช้กับการหารที่มีตัวหารลงท้ายด้วย 9 หรืออนุกรมของ 9 เพื่อเปลี่ยนตัวหารให้ดำเนินการหารได้ง่ายขึ้น ในการเปลี่ยนเศษส่วนเป็นทศนิยมซ้ำ (Recurring Decimals) และใช้ในการตรวจสอบเรื่องหารลงตัว ดังตาราง

ตารางแสดงเศษส่วนที่มีตัวส่วนลงท้ายด้วย9 หรืออนุกรมของ 9 เป็นเศษส่วนช่วย(Auxiliary Fraction=A.F.)

ข้อ	เศษส่วนที่มีตัวส่วน ลงท้ายด้วย 9	การปัดค่าตัวส่วน	เศษส่วนช่วย (A.F.)
1	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{0.1}{2}$
2	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{0.1}{3}$
3	$\frac{37}{59}$	$\frac{37}{60}$	$\frac{3.7}{6}$
4	$\frac{3}{59}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{0.3}{6}$
5	$\frac{73}{89}$	$\frac{73}{90}$	$\frac{7.3}{9}$
6	$\frac{1}{119}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{0.1}{12}$
7	$\frac{1}{149}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{0.1}{15}$
8	$\frac{7}{149}$	$\frac{7}{150}$	$\frac{0.7}{15}$
9	$\frac{172}{1299}$	$\frac{172}{1300}$	$\frac{1.72}{13}$
10	$\frac{371}{7999}$	$\frac{371}{8000}$	$\frac{0.371}{8}$
11	$\frac{537}{89999}$	$\frac{537}{90000}$	$\frac{0.0537}{9}$

ข้อ	เศษส่วนที่มีตัวส่วนลงท้ายด้วย 9	การปัดค่าตัวส่วน	เศษส่วนช่วย
12	$\frac{56}{15999}$	$\frac{56}{16000}$	$\frac{0.056}{16}$
13	$\frac{50}{69999}$	$\frac{50}{70000}$	$\frac{0.0050}{7}$
14	$\frac{50}{14999999}$	$\frac{50}{15000000}$	$\frac{0.00005}{15}=\frac{0.00001}{3}$
15	$\frac{2175}{79999999}$	$\frac{2175}{80000000}$	$\frac{0.0002175}{8}$
16	$\frac{21863}{49999}$	$\frac{21863}{50000}$	$\frac{2.1863}{5}$

จากตารางสังเกตได้ว่า ในข้อที่ 1 - 8 เป็นเศษส่วนที่ตัวส่วนลงท้ายด้วย 9 เพียงตัวเดียวและในข้อที่ 9 - 16 มีตัวส่วนลงท้ายด้วย 9 จำนวน 2,3,4,3,4,6,7 และ 4 ตัว ตามลำดับ ซึ่งมีวิธีการทำเป็นเศษส่วนช่วยเหมือนกัน เช่น $\frac{7}{299}$ และ $\frac{7}{2999}$ ซึ่งมีจำนวนของเลข 9 ต่างกันแต่จำนวนที่อยู่ข้างหน้าของเลข 9 เหมือนกัน เมื่อทำเป็นเศษส่วนช่วยแล้วจะมีตัวส่วนเท่ากัน ดังนี้

$F=\frac{7}{299}$ จะได้ $A.F.=\frac{0.07}{3}$

$\therefore\ F=\frac{7}{2999}$ จะได้ $A.F.=\frac{0.007}{3}$

แต่การหาผลลัพธ์จะมีวิธีการหาที่ต่างกันซึ่งจะได้ศึกษาดังตัวอย่างต่อไปนี้

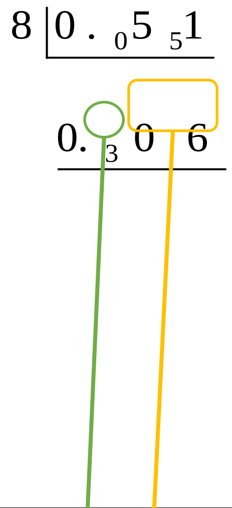
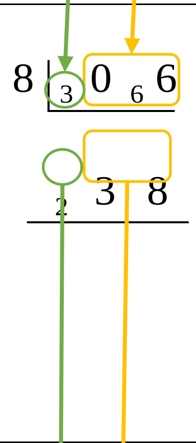
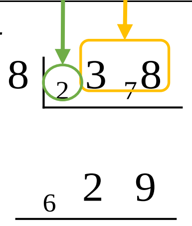
วิธีการดำเนินการ

การหารเศษส่วนที่มีตัวส่วนลงท้ายด้วย 9 หรืออนุกรมของ 9 ให้คำตอบเป็นทศนิยม(โดยใช้เศษส่วนช่วย)

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{51}{799}$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้ตัวหารมีเลข 9 จำนวนสองตัว จะดำเนินการหารเป็นชุดของคำตอบ ชุดละสองตัว

ขั้นที่ 1 ให้ $F=\frac{51}{799}$ จะได้ $A.F.=\frac{0.51}{8}$	นำ $\frac{51}{799}$ มาเขียนในรูปเศษส่วนช่วย โดยปัดค่าของตัวส่วนเพิ่มขึ้น 1 จะได้ $\frac{51}{799}=\frac{51}{800}$ $=\frac{0.51}{8}$ นำ 100 หารทั้งเศษและส่วน

ขั้นที่ 2  $8\,\vert\,0\,.\,{}_05\,{}_51$ $0.{}_3 0\ 6$	- นำ 8 ไปหาร 0 (ตัวแรกของตัวตั้ง) ได้ผลลัพธ์เป็น 0 เศษ 0 นำเศษที่ได้ไปเขียนเป็นตัวห้อยหน้า 5 (ตัวเลขตัวที่สองของตัวตั้ง) เป็น ${}_05$ มีค่าเท่ากับ 05 - นำ 8 ไปหาร 05 ได้ผลลัพธ์เป็น 0 เศษ 5 นำเศษ 5 ที่ได้ไปเขียนห้อยไว้หน้า 1 (ตัวเลขตัวที่สามของตัวตั้ง) เป็น ${}_51$ มีค่าเท่ากับ 51 - นำ 8 ไปหาร 51 (${}_51$) ได้ผลลัพธ์เป็น 6 เศษ 3 แล้วนำเศษ 3 ที่ได้มาเขียนห้อยไว้ด้านหน้าของผลลัพธ์ชุดที่หนึ่ง เป็น ${}_306$ หมายเหตุ การหารจะดำเนินการเป็นชุด ชุดละ 2 ตัว ตามจำนวนของเลข 9 ที่เป็นตัวส่วน
ขั้นที่ 3  $8\,\vert\,{}_30\ {}_66$ ${}_23\ 8$	- นำผลลัพธ์ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 (${}_306$) มาเป็นตัวตั้งในการหาผลลัพธ์ชุดที่สอง - นำ 8 ไปหาร 30 (${}_30$) ได้ผลลัพธ์เป็น 3 เศษ 6 นำ 6 ไปเขียนห้อยไว้หน้า 6 (ตัวเลขตัวที่สองของตัวตั้ง) เป็น ${}_66$ - นำ 8 ไปหาร 66 (${}_66$) ได้ผลลัพธ์เป็น 8 เศษ 2 แล้วนำเศษ 2 ที่ได้มาเขียนห้อยไว้ด้านของผลลัพธ์ชุดที่สองเป็น ${}_238$
ขั้นที่ 4  $8\,\vert\,{}_23\ {}_78$ ${}_62\ 9$	- นำผลลัพธ์ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 (${}_238$) มาเป็นตัวตั้งในการหาผลลัพธ์ชุดที่สาม - นำ 8 ไปหาร 23 (${}_23$) ได้ผลลัพธ์เป็น 2 เศษ 7 นำ 7 ไปเขียนห้อยไว้หน้า 8 (ตัวเลขตัวที่สองของตัวตั้ง) เป็น ${}_78$ - นำ 8 ไปหาร 78 (${}_78$) ได้ผลลัพธ์เป็น 9 เศษ 6 แล้วนำเศษ 6 ที่ได้มาเขียนห้อยไว้ด้านหน้าของผลลัพธ์ชุดที่สามเป็น ${}_629$ เพื่อนำไปเป็นตัวตั้งของการหารในชุดที่สี่ต่อไป

ในการหารขั้นต่อ ๆ ไป จะใช้วิธีการเหมือนขั้นตอนข้างต้น

นั้นคือ $\frac{0.51}{8} = 0.{}_306{}_238{}_629{}_578{}_272{}_034...$ **ดังนั้น** ผลลัพธ์ของ $\frac{51}{799} = 0.063829787234...$

เราสามารถพิสูจน์การดำเนินการหารข้างต้นได้ด้วยการใช้วิธีการหารตรงดังนี้

วิธีทำ $\frac{51}{799} = \frac{51}{80\bar{1}}$

$$\begin{array}{c|c|cccccccccc}
8^{0\bar{1}} & 0 & \overset{0}{{}_{0}5} & \overset{0}{{}_{5}1} & \overset{0}{{}_{3}0} & \overset{\bar{6}}{{}_{6}0} & \overset{\bar{3}}{{}_{2}0} & \overset{\bar{8}}{{}_{7}0} & \overset{\bar{2}}{{}_{6}0} & \overset{\bar{9}}{{}_{6}0} & \overset{\bar{7}}{{}_{5}0} & \overset{\bar{8}}{{}_{1}0} \\
\hline
 & & 5 & 51 & 30 & 66 & 23 & 78 & 62 & 69 & 57 & 18 \\
\hline
 & 0 & 0 & 6 & 3 & 8 & 2 & 9 & 7 & 8 & 7 & 2\ldots
\end{array}$$

ดังนั้น ผลลัพธ์ของ $\frac{51}{799} = 0.0638297872...$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{21863}{49999}$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้ตัวหารมีเลข 9 จำนวนสี่ตัว จะดำเนินการหารเป็นชุดของคำตอบ ชุดละสี่ตัว

ขั้นที่ 1 ให้ $F = \frac{21863}{49999}$ จะได้ $A.F.\frac{2.1863}{5}$	นำ $\frac{21863}{49999}$ มาเขียนในรูปเศษส่วนช่วย โดยปัดค่าของตัวส่วนเพิ่มขึ้น 1 จะได้ $\frac{21863}{49999} = \frac{21863}{50000}$ $= \frac{2.1863}{5}$ นำ 10000 หารทั้งเศษและส่วน และนำเศษ (3) มาใส่ไว้ด้านหน้าของชุดตัวเลขทั้ง 4 ตัว

ขั้นที่ 2 $5 \,\big|\, 2\,.\;{}_2 1\;{}_1 8\;{}_3 6\;{}_1 3$ $0\,.\,{}_3 4\;\;3\;\;7\;\;2$	นำ 5 ไปหารตัวเศษ โดยแบ่งเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 ตัว (ตามจำนวนของเลข 9) และนำเศษ (2) มาใส่ไว้ด้านหน้าของชุดตัวเลขทั้ง 4 ตัว
ขั้นที่ 3 $5 \,\big|\, 3\,4\;{}_4 3\;{}_3 7\;{}_2 2$ ${}_2\,6\;\;8\;\;7\;\;4$	นำผลลัพธ์ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 (${}_3 4372$) นำ 5 ไปหารโดยใช้วิธีการตั้งหารทำนองเดียวกัน กับตัวอย่างที่ 1
ขั้นที่ 4 $5 \,\big|\, 2\,6\;{}_1 8\;{}_3 7\;{}_2 4$ ${}_4\,5\;\;3\;7\;\;4$	นำผลลัพธ์ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 (${}_2 6874$) นำ 5 ไปหารโดยใช้วิธีการตั้งหารทำนองเดียวกัน กับตัวอย่างที่ 1

ในการหารขั้นต่อ ๆ ไป จะใช้วิธีการเหมือนขั้นตอนข้างต้น

นั้นคือ $\dfrac{2.1863}{5} = 0.{}_3 4372\,{}_2 6874\,{}_4 5374\ldots$

ดังนั้น ผลลัพธ์ของ $\dfrac{21863}{49999} = 0.437268745374\ldots$ -

ตัวอย่าง 2 จงเขียน $\dfrac{21863}{49999}$ ให้อยู่ในรูปทศนิยม โดยใช้วิธีการหารตรง

วิธีทำ $\dfrac{21863}{49999} = \dfrac{21863}{5000\bar{1}}$

$$\begin{array}{c|c|ccccccccccc}
5^{000\bar{1}} & 2 & \overset{0}{{}_2 1} & \overset{0}{{}_1 8} & \overset{0}{{}_3 6} & \overset{0}{{}_1 3} & \overset{\bar{4}}{{}_3 0} & \overset{\bar{3}}{{}_4 0} & \overset{\bar{7}}{{}_3 0} & \overset{\bar{2}}{{}_2 0} & \overset{\bar{6}}{{}_2 0} & & \\ \hline
 & & & 21 & 18 & 36 & 13 & 34 & 43 & 37 & 22 & 26 & \\ \hline
 & 0 & 4 & 3 & 7 & 2 & 6 & 8 & 7 & 4 & 5 & \ldots &
\end{array}$$

ดังนั้น ผลลัพธ์ของ $\dfrac{21863}{49999} = 0.437268745\ldots$

ตัวอย่างเพิ่มเติม

(1) $F = \frac{6}{29} \therefore A.F. = \frac{0.6}{3}$ จะได้ $F = 0.{}_{0}2{}_{2}0{}_{2}6{}_{2}8{}_{1}9{}_{1}6{}_{1}5{}_{0}5{}_{2}1{}_{0}7{}_{1}2{}_{0}4{}_{1}1{}_{2}3{}_{2}7\ldots$

$F = 0.\dot{2}068965517241379310344827858\dot{6}$

(2) $F = \frac{71}{89} \therefore A.F. = \frac{7.1}{9}$ จะได้ $F = 0.79775280898\ldots$

(3) $F = \frac{17}{139} \therefore A.F. = \frac{1.7}{14}$ จะได้ $F = 0.12230215827\ldots$

(4) $F = \frac{98}{179} \therefore A.F. = \frac{9.8}{18}$ จะได้ $F = 0.54748603351955\ldots$

(5) $F = \frac{1}{43} = \frac{3}{129} \therefore A.F. = \frac{0.3}{13}$ จะได้ $F = 0.023255813953488\ldots$

(6) $F = \frac{17}{43} = \frac{51}{129} \therefore A.F. = \frac{5.1}{13}$ จะได้ $F = 0.395348837209\ldots$

(7) $F = \frac{18}{73} = \frac{54}{219} \therefore A.F. = \frac{5.4}{22}$ จะได้ $F = 0.24657534\ldots$

(8) $F = \frac{53}{799} \therefore A.F. = \frac{5.3}{8}$ จะได้ $F = 0.0663329161451814\ldots$

(9) $F = \frac{15}{899} \therefore A.F. = \frac{0.15}{9}$ จะได้ $F = 0.01666852057\ldots$

(10) $F = \frac{2}{1799} \therefore A.F. = \frac{0.02}{18}$ จะได้ $F = 0.0011117287\ldots$

(11) $F = \frac{100}{233} = \frac{300}{699} \therefore A.F. = \frac{3}{7}$ จะได้ $F = 0.429184549356223175\ldots$

(12) $F = \frac{444}{13999} \therefore A.F. = \frac{0.444}{14}$ จะได้ $F = 0.031716551182\ldots$

(13) $F = \frac{97017}{29999999} \therefore A.F. = \frac{0.0097917}{3}$ จะได้ $F = 0.003233900107796670259\ldots$

หมายเหตุ ในกรณีที่ตัวส่วน ลงท้ายด้วย 1 , 7 หรือ 3 เราสามารถหาจำนวนที่มาคูณให้ตัวส่วนลงท้ายด้วย 9 ได้

ฝึกสมองประลองปัญญา

ข้อ	เศษส่วนสามัญ	เศษส่วนช่วย	วิธีทำ
1	$\frac{3}{19}$	$\frac{0.3}{2}$	$\begin{array}{r\|l} 2 & 0\,.\,3 \\ \hline & 0\,._{1}1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r\|l} 2 & 1\,1 \\ \hline & {}_{1}\,5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r\|l} 2 & 1\,5 \\ \hline & {}_{1}\,7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r\|l} 2 & 1\,7 \\ \hline & {}_{1}\,8 \end{array}$ จะได้ $F = 0._{1}1_{1}5_{1}7_{1}8...$ $\therefore F = 0.1578...$ สามารถทำตามขั้นตอนดังกล่าวจนกระทั่งได้จำนวนตำแหน่งของทศนิยมตามต้องการ
2	$\frac{11}{59}$		
3	$\frac{7}{119}$		
4	$\frac{17}{1299}$		
5	$\frac{391}{7999}$		

6	$\frac{132}{69999}$		
7	$\frac{234}{15999}$		
8	$\frac{888}{499999}$		
9	$\frac{891}{10999}$		
10	$\frac{4}{1196}$		

4.2 เศษส่วนช่วยแบบที่ 2

ในกรณีที่เศษส่วน มีตัวส่วนลงท้ายด้วย 1 เช่น $\frac{3}{61}, \frac{345}{6751}, \frac{6267}{80001}, \frac{678}{2300001}$ เป็นต้น วิธีแปลงเป็นเศษส่วนช่วยคือ ให้ตัด 1 ที่ตัวส่วนออกแล้วใส่ 0 แทน พร้อมกับลดค่าของตัวเศษลง 1 ดังตารางต่อไปนี้ :

ตารางแสดงเศษส่วนที่มีตัวส่วนลงท้ายด้วย 1 และเศษส่วนช่วยแบบที่ 2

ข้อ	เศษส่วนที่มีตัวส่วนลงท้ายด้วย 1	การปัดค่าตัวส่วน	เศษส่วนช่วย (A.F.)
1	$\frac{3}{61}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{0.2}{6}$
2	$\frac{36}{61}$	$\frac{35}{60}$	$\frac{3.5}{6}$
3	$\frac{28}{71}$	$\frac{27}{70}$	$\frac{2.7}{7}$
4	$\frac{73}{91}$	$\frac{72}{90}$	$\frac{7.2}{9}$
5	$\frac{2}{121}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{0.1}{12}$
6	$\frac{14}{131}$	$\frac{13}{130}$	$\frac{1.3}{13}$
7	$\frac{1}{301}$	$\frac{0}{300}$	$\frac{0.00}{3}$
8	$\frac{1}{901}$	$\frac{0}{900}$	$\frac{0.00}{9}$
9	$\frac{172}{1301}$	$\frac{171}{1300}$	$\frac{1.71}{13}$
10	$\frac{2743}{7001}$	$\frac{2742}{7000}$	$\frac{2.742}{7}$
11	$\frac{6163}{8001}$	$\frac{6162}{8000}$	$\frac{6.162}{8}$
12	$\frac{1768}{9001}$	$\frac{1767}{9000}$	$\frac{1.767}{9}$
13	$\frac{56}{16001}$	$\frac{55}{16000}$	$\frac{0.055}{16}$
14	$\frac{50}{700001}$	$\frac{49}{700000}$	$\frac{0.00049}{7}$
15	$\frac{2175}{80000001}$	$\frac{2174}{80000000}$	$\frac{0.0002174}{8}$

วิธีการดำเนินการการแปลงเศษส่วนแบบที่ 2 เป็นจำนวนทศนิยม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{13}{31}$

ขั้นตอนการหาร

ขั้นที่ 1 ให้ $F = \frac{13}{31}$ จะได้ A.F. = $\frac{1.2}{3}$	นำ $\frac{13}{31}$ **มาเขียนในรูปเศษส่วนช่วย** **โดยปัดค่าของตัวส่วน ลดลง 1** **จะได้** $\frac{13}{31} = \frac{12}{30}$ $= \frac{1.2}{3}$ นำ 10 หารทั้งเศษและส่วน
ขั้นที่ 2 $3\,\big\lvert\underline{1\,.\,2}$ ตัวเติมเต็มเก้าของ 4 คือ 5 จะได้ 5 $\underline{0\,.\,{}_{0}4}$	นำ 3 ไปหารตัวเศษ โดยใช้วิธีการตั้งหาร ได้ 4 เศษ 0 และนำเศษที่ได้ (0) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 4
ขั้นที่ 3 $3\,\big\lvert\underline{0\;5}$ ตัวเติมเต็มเก้าของ 1 คือ 8 จะได้ 28 $\underline{{}_{2}\,1}$	นำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 (4) มาหาตัวเติมเต็มเก้าของ 4 คือ 5 นำ 05 หารด้วย 3 ได้ 1 เศษ 2 และนำเศษที่ได้ (2) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 1
ขั้นที่ 4 $3\,\big\lvert\underline{2\;8}$ $\underline{{}_{1}\,9}$	นำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 (21) มาหาส่วนเติมเต็มเก้าของ 1 คือ 8 นำ 28 หารด้วย 3 ได้ 9 เศษ 1 และนำเศษที่ได้ (1) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 9

ในการหารขั้นต่อ ๆ ไป จะใช้วิธีการเหมือนขั้นตอนข้างต้น

$$\therefore \quad \frac{13}{31} = 0._{0}4_{2}1_{1}9\ldots$$

ดังนั้นผลลัพธ์ของ $\frac{13}{31} = 0.419\ldots$

เราสามารถพิสูจน์การดำเนินการหารข้างต้นได้ด้วยการใช้วิธีการหารตรงดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{array}{c|c|ccccccccc} 3^{1} & 1 & \overset{0}{{}_{1}3} & \overset{4}{{}_{1}0} & \overset{1}{{}_{3}0} & \overset{9}{{}_{2}0} & \overset{3}{{}_{2}0} & \overset{5}{{}_{2}0} & \overset{4}{{}_{3}0} & \overset{8}{{}_{2}0} & \overset{3}{{}_{3}0} \\ \hline & & 13 & 6 & 29 & 11 & 17 & 15 & 26 & 12 & 27 \\ \hline & 0 & 4 & 1 & 9 & 3 & 5 & 4 & 8 & 3 & 8\ldots \end{array}$$

ดังนั้น ผลลัพธ์ของ $\frac{13}{31} = 0.419354838\ldots$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{10}{27}$

ขั้นตอนการหาร

ขั้นที่ 1 ให้ $F = \frac{10}{27}$ จะได้ $A.F. = \frac{2.9}{8}$	นำ $\frac{10}{27}$ มาปรับปรุงตัวเศษและตัวส่วน เพื่อให้ตัวส่วนลงท้ายด้วย 1 ดังนี้ $\frac{10}{27} = \frac{10\times 3}{27\times 3} = \frac{30}{81}$ และนำมาเขียนในรูปเศษส่วนช่วย โดยปัดค่าของตัวเลขลดลง 1 หน่วย จะได้ $\frac{29}{80} = \frac{2.9}{8}$ นำ 10 หารทั้งเศษและส่วน
ขั้นที่ 2 $8\,\big\|\,\underline{2\,.\,9}$ $\underline{0\;\cdot_{5}3}$ ตัวเติมเต็มเก้าของ 3 คือ 6 จะได้ 56	นำ 8 ไปหารตัวเศษ โดยใช้วิธีการตั้งหาร ได้ 3 เศษ 5 และนำเศษที่ได้ (5) มาใส่ไว้ ด้านหน้าของ 3

ขั้นที่ 3 $8\,\underline{\vert\,5\ \ 6}$ $\underline{{}_07}$ ตัวเติมเต็มเก้าของ 7 คือ 2 จะได้ 02	นำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 (53) มาหาตัวเติมเต็มเก้าของ 3 คือ 6 นำ 56 หารด้วย 8 ได้ 7 เศษ 0 และนำเศษที่ได้ (0) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 7
ขั้นที่ 4 $8\,\underline{\vert\,0\,2}$ $\underline{{}_2\,0}$ ตัวเติมเต็มเก้าของ 0 คือ 9 จะได้ 29	ขั้นตอนที่ 4 นำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 (07) มาหาส่วนเติมเต็มเก้าของ 7 คือ 2 มาหารด้วย 8 ได้ 0 เศษ 2 และนำเศษที่ได้ (2) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 0
ขั้นที่ 5 $8\,\underline{\vert\,2\,9}$ $\underline{{}_5\ 3}$ ตัวเติมเต็มเก้าของ 3 คือ 6 จะได้ 56	ขั้นตอนที่ 5 นำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 (20) มาหาส่วนเติมเต็มเก้าของ 0 คือ 9 มาหารด้วย 8 ได้ 3 เศษ 5 และนำเศษที่ได้ (5) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 3
ขั้นที่ 6 $8\,\underline{\vert\,5\ \ 6}$ $\underline{{}_07}$ ตัวเติมเต็มเก้าของ 7 คือ 2 จะได้ 02	ขั้นตอนที่ 6 นำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 5 (56) มาหาส่วนเติมเต็มเก้าของ 3 คือ 6 นำ 56 หารด้วย 8 ได้ 7 เศษ 0 และนำเศษที่ได้ (0) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 7
ขั้นที่ 7 $8\,\underline{\vert\,0\,2}$ $\underline{{}_2\ 0}$	ขั้นตอนที่ 7 นำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 6 (07) มาหาส่วนเติมเต็มเก้าของ 7 คือ 2 มาหารด้วย 8 ได้ 0 เศษ 2 โดยนำเศษที่ได้ (2) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 0

ในการหารขั้นต่อ ๆ ไป จะใช้วิธีการเหมือนขั้นตอนข้างต้น

นั้นคือ $\frac{2.9}{8} = 0.{}_53{}_07{}_20{}_53{}_07{}_20\ldots$ **ดังนั้น** ผลลัพธ์ของ $\frac{10}{27} = 0.370370\ldots = 0.\dot{3}7\dot{0}$

ข้อสังเกต ในการหารเศษส่วนช่วยแบบที่ 2 นี้ หลักหน่วยของตัวตั้งที่จะนำมาตั้งหารใหม่จะต้องเป็น**ส่วนเติมเต็มของเก้า**เสมอ

ตัวอย่างเพิ่มเติม

(1) $F = \frac{1}{41} \quad \therefore A.F. = \frac{0.0}{4}$ จะได้ $F = 0._{0}0_{1}2_{1}4_{3}3_{0}9_{0}0_{1}2_{1}4_{3}3_{0}9_{0}0\ldots$

$F = 0.024390243902439\ldots = 0.\dot{0}243\dot{9}$

(2) $F = \frac{70}{71} \quad \therefore A.F. = \frac{6.9}{7}$ จะได้ $F = 0.985915492957746478873 23\ldots$

(3) $F = \frac{91}{171} \quad \therefore A.F. = \frac{9.0}{17}$ จะได้ $F = 0.53216374269\ldots$

(4) $F = \frac{131}{701} \quad \therefore A.F. = \frac{130}{700} = \frac{1.30}{7}$ คำตอบจะต้องเป็นกลุ่มละ 2 ตัว

จะได้ $F = 0.186875891583\ldots.$

(5) $F = \frac{1400}{1401} \quad \therefore A.F. = \frac{13.99}{14}$ จะได้ $F = 0.9992862241\ldots$

(6) $F = \frac{243}{1601} \quad \therefore A.F. = \frac{2.42}{16}$ จะได้ $F = 0.15178013741411617738\ldots$

(7) $F = \frac{5}{67} = \frac{15}{201} \quad \therefore A.F. = \frac{0.14}{2}$ คำตอบจะต้องเป็นกลุ่มละ 2 ตัว

จะได้ $F = 0.0746268656\ldots$

(8) $F = \frac{2743}{7001} \quad \therefore A.F. = \frac{2.742}{7}$ คำตอบจะต้องเป็นกลุ่มละ 3 ตัว

จะได้ $F = 0.391801171261248393086\ldots$

(9) $F = \frac{31}{77} = \frac{93}{231} \quad \therefore A.F. = \frac{9.2}{23}$ จะได้ $F = 0.4025974\ldots = 0.\dot{4}0259\dot{7}$

(10) $F = \frac{29}{15001} \quad \therefore A.F. = \frac{0.0283}{15}$ จะได้ $F = 0.001933204453036\ldots$

(11) $F = \frac{137}{13000001} \quad \therefore A.F. = \frac{.000137}{13}$ จะได้ $F = 0.0000105384607278107 13245\ldots$

ฝึกสมองประลองปัญญา

ข้อ	F	A.F.	Solution
1	$\frac{53}{91}$	$\frac{5.2}{9}$	$\begin{array}{ll} 9 & \underline{\lfloor 5.2} \\ & \underline{0._{7}5} \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} 9 & \underline{\lfloor 7\ 4} \\ & \underline{0._{2}8} \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} 9 & \underline{\lfloor 2\ 1} \\ & \underline{0._{3}2} \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} 9 & \underline{\lfloor 3\,7} \\ & \underline{0._{1}4} \end{array}$ จะได้ $F = 0._{7}5_{2}8_{3}2_{1}4...$ $\therefore F = 0.5824...$ สามารถทำตามขั้นตอนดังกล่าวจนกระทั่ง ได้จำนวนตำแหน่งของทศนิยมตามต้องการ
2	$\frac{47}{121}$		
3	$\frac{16}{131}$		
4	$\frac{5}{601}$		

5	$\frac{11}{171}$		
6	$\frac{27}{24001}$		
7	$\frac{62}{124}$		
8	$\frac{19}{15001}$		

การประยุกต์ใช้เศษส่วนช่วย

จากวิธีการแปลงเศษส่วนที่ตัวส่วนลงท้ายด้วย 9 หรือ 1 เป็นจำนวนในรูปทศนิยม ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในกรณีที่ตัวส่วนมีค่าใกล้จำนวนที่เป็นเลขยกกำลังของฐานสิบมีทั้งค่าน้อยกว่าหรือมากกว่ากำลังของฐานสิบไม่มากนัก เราอาจใช้วิธีการข้างต้นมาประยุกต์ใช้ โดยการเพิ่มเข้าหรือลบออกได้ในขั้นตอนการหาร

เช่น

$$F = \frac{15}{68} \quad \therefore \text{A.F.} = \frac{15}{70} = \frac{1.5}{7}$$

$$F = \frac{101}{138} \quad \therefore \text{A.F.} = \frac{101}{140} = \frac{10.1}{14}$$

$$F = \frac{73}{97} \quad \therefore \text{A.F.} = \frac{73}{100} = \frac{7.3}{10}$$

$$F = \frac{17}{127} \quad \therefore \text{A.F.} = \frac{17}{130} = \frac{1.7}{13}$$

$$F = \frac{5236}{8997} \quad \therefore \text{A.F.} = \frac{5236}{9000} = \frac{5.236}{9}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{15}{68}$

วิธีปกติ $68\overline{\smash{)}15.0}$

$\underline{136}$
140
$\underline{136}$
400
$\underline{340}$
600
$\underline{544}$
560
$\underline{544}$
160
$\underline{136}$
240
$\underline{204}$
360
$\underline{340}$

200
$\underline{136}$
640
$\underline{612}$
280
$\underline{272}$
80
$\underline{68}$
120
$\underline{68}$
520
$\underline{476}$
440
$\underline{408}$

จากวิธีข้างต้น สามารถพัฒนาเป็นการคิดเลขในใจได้โดยใช้วิธีทางเวทคณิต ได้ดังนี้

ตารางแสดงการประยุกต์ใช้เศษส่วนช่วย

ขั้นตอนการหาร

ขั้นที่ 1 ให้ $F=\frac{15}{68}$ จะได้ $A.F=\frac{15}{70}=\frac{1.5}{7}$	แปลงเศษส่วนที่กำหนดให้ในรูปเศษส่วนช่วย พิจารณาตัวส่วน 68 ต่างจาก 69 อยู่ 1 การหาผลหารตั้งแต่ตัวที่สองเป็นต้นไปจะต้องนำตัวตั้ง มาบวกกับหนึ่งเท่าของผลหาร
ขั้นที่ 2 $7\,\underline{\big\|\,1\,.\,5}$ นำ 12 + (1×2) = 14 และนำไปตั้งหารใหม่ $\underline{0\,._{1}2}$	นำ 7 ไปหารตัวเศษ1.5 โดยวิธีการตั้งหาร ได้ .2 เศษ 1 และนำเศษที่ได้ (1) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 2
ขั้นที่ 3 $7\,\underline{\big\|\,1\,4}$ นำ 02 + (1×2) = 04 และนำไปตั้งหารใหม่ $\underline{_{0}\,2}$	จากขั้นที่ 2 ก่อนหาผลหารต้องนำตัวตั้งคือ 12 บวกกับหนึ่งเท่าของผลหาร คือ 2 จะได้ 12 + (1×2) = 14 นำ 7 ไปหาร 14 ได้ 2 เศษ 0 และนำเศษที่ได้ (0) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 2
ขั้นที่ 4 $7\,\underline{\big\|\,0\,4}$ $\underline{_{4}\,0}$ นำ 40 + (1×0) = 40 และนำไปตั้งหารใหม่	จากขั้นที่ 3 ก่อนหาผลหารต้องนำตัวตั้งคือ 02 บวกกับหนึ่งเท่าของผลหาร คือ 2 จะได้ 02 + (1×2) = 04 นำ 7 ไปหาร 04 ได้ 0 เศษ 4 และนำเศษที่ได้ (4) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 4
ขั้นที่ 5 $7\,\underline{\big\|\,4\,0}$ นำ 40 + (1×0) = 40 และนำไปตั้งหารใหม่	จากขั้นที่ 4 ก่อนหาผลหารต้องนำตัวตั้งคือ 40 บวกกับหนึ่งเท่าของผลหาร คือ 0 จะได้ 40 + (1×0) = 40 นำ 7 ไปหาร 40 ได้ 5 เศษ 5 และนำเศษที่ได้ (5) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 5
ขั้นที่ 6 $7\,\underline{\big\|\,6\,0}$ นำ 55 + (1×5) = 60 และนำไปตั้งหารใหม่ $\underline{_{4}\,8}$	จากขั้นที่ 5 ก่อนหาผลหารต้องนำตัวตั้งคือ 55 บวกกับหนึ่งเท่าของผลหาร คือ 5 จะได้ 55 + (1×5) = 60 นำ 7 ไปหาร 60 ได้ 8 เศษ 4 และนำเศษที่ได้ (4) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 8

ขั้นที่ 7 $\begin{array}{r\|l} 7 & 5\ 6 \\ \hline & \underline{{}_{0}\ 8} \end{array}$	การหารขั้นตอนไปจะใช้วิธีการหารเหมือนขั้นตอนข้างต้นและหาผลหารจนได้จำนวนทศนิยมตามต้องการ

นั่นคือ $\frac{1.5}{7} = 0.{}_{1}2{}_{0}2{}_{4}0{}_{5}5{}_{4}8{}_{0}8\ldots$

ดังนั้น ผลลัพธ์ของ $\frac{15}{68} = 0.220588\ldots$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{101}{138}$ $(0.7318840579710144927 5\ldots)$

วิธีเวทคณิต $\text{A.F.} = \frac{101}{14}$ พิจารณา 138 ต่างจาก 139 อยู่ 1

$$F = \frac{101}{14} = 0.{}_{3}7{}_{2}3{}_{12}1{}_{10}8{}_{4}8{}_{0}4{}_{8}0{}_{10}5{}_{12}7{}_{8}9{}_{0}7{}_{0}1{}_{2}0{}_{6}1{}_{6}4{}_{12}4{}_{2}9{}_{10}2{}_{6}7{}_{4}5\ldots$$

วิธีปกติ

$$\begin{array}{l} 138\,\big|\,\underline{101.0} \\ \underline{99\ 6} \\ 440 \\ \underline{414} \\ 260 \\ \underline{138} \\ 1220 \\ \underline{1104} \\ 560 \\ \underline{552} \\ 800 \\ \underline{690} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1100 \\ \underline{966} \\ 1340 \\ \underline{1242} \\ 980 \\ \underline{966} \\ 140 \\ \underline{138} \\ 200 \\ \underline{138} \\ 620 \\ \underline{552} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 680 \\ \underline{552} \\ 1280 \\ \underline{1242} \\ 380 \\ \underline{276} \\ 1040 \\ \underline{966} \\ 740 \\ \underline{690} \\ 50 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{73}{97}$ $(0.7525773195876288659\text{7...})$

วิธีปกติ $97\overline{)73.0}$

$\underline{679}$

510

$\underline{485}$

250

$\underline{194}$

560

$\underline{485}$

750

$\underline{679}$

710

$\underline{679}$

310

$\underline{291}$

190

$\underline{97}$

930

$\underline{873}$

570

$\underline{485}$

850

$\underline{776}$

740

$\underline{679}$

610

$\underline{582}$

280

$\underline{194}$

860

$\underline{776}$

840

$\underline{776}$

640

$\underline{582}$

580

$\underline{485}$

950

$\underline{873}$

770

$\underline{679}$

91

จากวิธีข้างต้น สามารถพัฒนาเป็นการคิดเลขในใจได้โดยใช้วิธีทางเวทคณิต ได้ดังนี้

ตารางแสดงการประยุกต์ใช้เศษส่วนช่วย

ขั้นตอนการหาร

ขั้นที่ 1 ให้ $F = \frac{73}{97}$ จะได้ $A.F. = \frac{73}{100} = \frac{7.3}{10}$	แปลงเศษส่วนที่กำหนดให้ในรูปเศษส่วนช่วย พิจารณาตัวส่วน 97 ต่างจาก 99 อยู่ 2 การหาผลหารตั้งแต่ตัวที่สองเป็นต้นไปจะต้องนำตัวตั้งมาบวกกับสองเท่าของผลหาร

ขั้นที่ 2 $10\,\big\lvert\,\underline{7\,.\,3}$ นำ 37 + (2×7) = 51 และนำไปตั้งหารใหม่ $\underline{0\,.{}_{3}7}$	นำ 10 ไปหารตัวเศษโดยวิธีการตั้งหาร ได้ 7 เศษ 3 และนำเศษที่ได้ (3) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 7
ขั้นที่ 3 $10\,\big\lvert\,\underline{5\,1}$ นำ 15 + (2×5) = 25 และนำไปตั้งหารใหม่ $\underline{{}_{1}\,5}$	จากขั้นที่ 2 ก่อนหาผลหารต้องนำตัวตั้งคือ 37 บวกกับสองเท่าของผลหาร คือ 7 จะได้ 37 + (2×7) = 51 นำ 10 ไปหาร 51 ได้ 5 เศษ 1 และนำเศษที่ได้ (1) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 5
ขั้นที่ 4 $10\,\big\lvert\,\underline{2\,5}$ นำ 52 + (2×2) = 56 และนำไปตั้งหารใหม่ $\underline{{}_{5}\,2}$	จากขั้นตอนที่ 3 ก่อนหาผลหารต้องนำตัวตั้งคือ 15 บวกกับสองเท่าของผลหาร คือ 5 จะได้ 15 + (2×5) = 25 นำ 10 ไปหาร 25 ได้ 2 เศษ 5 และนำเศษที่ได้ (5) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 2
ขั้นที่ 5 $10\,\big\lvert\,\underline{5\,6}$ $\underline{{}_{6}\,5}$ นำ 65 + (2×5) = 75 และนำไปตั้งหารใหม่	จากขั้นตอนที่ 4 ก่อนหาผลหารต้องนำตัวตั้งคือ 52 บวกกับสองเท่าของผลหาร คือ 2 จะได้ 52 + (2×2) = 56 นำ 10 ไปหาร 56 ได้ 5 เศษ 6 และนำเศษที่ได้ (5) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 5
ขั้นที่ 6 $10\,\big\lvert\,\underline{7\,5}$ นำ 57 + (2×7) = 71 และนำไปตั้งหารใหม่ $\underline{{}_{5}\,7}$	จากขั้นตอนที่ 5 ก่อนหาผลหารต้องนำตัวตั้งคือ 65 บวกกับสองเท่าของผลหาร คือ 5 จะได้ 65 + (2×5) = 75 นำ 10 ไปหาร 75 ได้ 7 เศษ 5 และนำเศษที่ได้ (5) มาใส่ไว้ด้านหน้าของ 7
ขั้นที่ 7 $10\,\big\lvert\,\underline{7\,1}$ $\underline{{}_{1}\,7}$	การหารขั้นตอนไปจะใช้วิธีการหารเหมือนขั้นตอนข้างต้น และหาผลหารจนได้จำนวนทศนิยมตามต้องการ

นั้นคือ $\dfrac{7.3}{10} = 0.{}_{3}7{}_{1}5{}_{5}2{}_{6}5{}_{5}7{}_{1}7\ldots$

ดังนั้นผลลัพธ์ของ $\dfrac{73}{97} = 0.752577\ldots$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\frac{17}{127}$ อยู่ในรูปทศนิยม 20 ตำแหน่ง

วิธีเวทคณิต $\text{A.F.} = \frac{1.7}{13}$ พิจารณา 127 ต่างจาก 129 อยู่ 2

ต้องบวกตัวตั้งกับ 2 คูณกับผลลัพธ์ของมัน(Q- digit) ในแต่ละครั้งในการหาร

$$F = \frac{1.7}{13} = 0.{}_4 1_4 3_{10} 3_5 8_9 5_1 8_8 2_8 6_7 7_0 7_8 1_5 6_3 5_6 3_4 5_3 4_0 3_9 0_{12} 6\ldots$$

ตัวอย่างที่ 5 จงแสดง $\frac{5236}{8997}$ อยู่ในรูปทศนิยม 21 ตำแหน่ง $(0.581/971/768/367/233/522/285/\ldots)$

วิธีเวทคณิต $\text{A.F.} = \frac{5.236}{9}$ พิจารณา 8997 ต่างจาก 8999 อยู่ 2 และคำตอบจะต้องเป็นกลุ่มๆ ละ 3 ตัวเลขโดด ดังนั้นต้องบวกตัวตั้งกับ 2 คูณกับผลลัพธ์ของมัน (Q- digit) ในแต่ละครั้งในการหาร

$$F = 0.{}_7 581_4 971_1 768_1 367\,{}_4 233_1 522_1 285\ldots$$

วิธีปกติ $8997\overline{)5236.0}$

$$\begin{array}{l}
\underline{44985} \\
73750 \\
\underline{71976} \\
17740 \\
\underline{8997} \\
87430 \\
\underline{80973} \\
64570 \\
\underline{62979} \\
61510 \\
\underline{53982} \\
75280 \\
\underline{71976} \\
33040 \\
\underline{26991} \\
60490 \\
\underline{53982} \\
65080 \\
\underline{62979} \\
21010 \\
\underline{17994}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
30160 \\
\underline{26991} \\
31690 \\
\underline{26991} \\
46990 \\
\underline{44985} \\
20050 \\
\underline{17994} \\
20560 \\
\underline{17994} \\
25660 \\
\underline{17994} \\
76660 \\
\underline{71976} \\
46840 \\
\underline{44985} \\
1885
\end{array}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 จงหาทศนิยมซ้ำ(Recurring Decimal)

1. $\frac{25}{29}$

2. $\frac{24}{39}$

3. $\frac{29}{39}$

4. $\frac{3}{49}$

5. $\frac{44}{69}$

6. $\frac{44}{79}$

7. $\frac{1}{99}$

8. $\frac{1}{9}$

การใช้สัดส่วนช่วยในการดำเนินการหารแบบเอกาธิเกนปุรเวณะ

9. $\frac{1}{7}$

10. $\frac{2}{13}$

11. $\frac{5}{23}$

12. $\frac{17}{33}$

13. $\frac{9}{11}$

14. $\frac{3}{17}$

หาคำตอบที่ถูกต้องทศนิยม 4 ตำแหน่ง

15. $\frac{18}{59}$

16. $\frac{67}{89}$

17. $\frac{100}{109}$

18. $1\frac{3}{7}$

19. $\frac{20}{13}$

20. $\frac{99}{49}$